This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 4638.82

Math 4638.82

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
1 Dec., 1885.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 4638.82

Math 4638.82

SCIENCE CENTER LIBRARY

EINFÜHRUNG

IN DIE

THEORIE DER ISOGONALEN VERWANDTSCHAFTEN

UND DER

CONFORMEN ABBILDUNGEN,

VERBUNDEN MIT

ANWENDUNGEN AUF MATHEMATISCHE PHYSIK.

VON

DR. GUSTAV HOLZMÜLLER,

DIREKTOR DER KGL. GEWERBESCHULE ZU HAGEN,
MITGLIED DER KAISERL. LEOP. CAROL. AKADEMIE DER NATURFORSCHER.

MIT 26 LITHOGRAPHISCHEN TAFELN.

NOTE TO THE READER

The paper in this volume is brittle or the inner margins are extremely narrow.

We have bound or rebound the volume utilizing the best means possible.

PLEASE HANDLE WITH CARE

GENERAL BOOKBINDING CO., CHESTERLAND, OHIO

EINFÜHRUNG

IN DIE

THEORIE DER ISOGONALEN VERWANDTSCHAFTEN

UND DER

CONFORMEN ABBILDUNGEN,

VERBUNDEN MIT

ANWENDUNGEN AUF MATHEMATISCHE PHYSIK.

VON

DR. GUSTAV HOLZMÜLLER,

DIREKTOR DER KGL. GEWERBESCHULE ZU HAGEN,
MITGLIED DER KAISERL. LEOP. CAROL. AKADEMIE DER NATURFORSCHER.

MIT 26 LITHOGRAPHISCHEN TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

~~VI 3427~~
Math 4638.82

1885. Dec. 1,
Haven Fund.

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Vorwort.

Das Werk, welches hiermit dem mathematischen Publicum übergeben wird, hat die Absicht, auf möglichst anschauliche Weise und ohne allzu grosse Anforderungen bezüglich der Vorkenntnisse des Leserkreises in die Riemann'schen Theorien und ihre Anwendungen auf Geometrie, Physik und Kartographie einzuführen und besonders zum Ausbau der Theorie der isogonalen Verwandtschaften beizutragen.

Da es sich um eine Einführung handelt, ist häufig auf die elegante Knappheit des Ausdrucks, durch welche sich die mathematische Darstellung sonst auszuzeichnen pflegt, die aber das Selbststudium bisweilen recht erheblich erschwert, verzichtet worden. Die Zahl derer, die sich durch jene vornehme Kürze vom Studium der neueren Theorien abschrecken lassen, ist weit grösser, als man zu glauben pflegt, und wenn die Arbeit des Verfassers nur einigermassen zur Verminderung derselben beiträgt, so wird er gern den Vorwurf der Breite über sich ergehen lassen.

Zahlreiche Figurentafeln, zum Theil vollständig Neues darstellend, erleichtern das Verständniss. Wenn der Lithograph nicht an allen Stellen den Zug der Curven hinreichend genau wiedergegeben hat, so entschuldigt sich dies durch die Schwierigkeit solcher Zeichnungen. Ihren Zweck werden sie trotzdem erfüllen, und der Verfasser kann der Verlagsbuchhandlung nur seinen Dank für das Entgegenkommen bezüglich der kostspieligen Ausstattung aussprechen.

Ein grösserer Theil der Figuren hat bereits eine praktische Verwerthung gefunden, indem sie Herrn Dr. A. Guébhard zu Paris zur Grundlage für gewisse Versuche dienten, bei denen es sich um Fixirung der Linien gleichen Potentials für constante elektrische Strömung in ebenen Platten handelte. Sie sind daher im *Électricien*, in den *Bulletins de la Société de Physique*, im *Journal de Physique* und in den *Comptes Rendus* der Académie des Sciences (besonders im Berichte über die Sitzung vom 13. Februar 1882)

vielfach zur Sprache gekommen, auch wurden sie zugleich mit den von Herrn Guébhard überlassenen Platten durch Herrn Helmholtz am 2. März d. J. der Akademie der Wissenschaften zu Berlin und am folgenden Tage der Physikalischen Gesellschaft daselbst vorgelegt. Die betreffenden Versuche sind noch nicht abgeschlossen und werden zu weiteren theoretischen Erörterungen Anlass geben, mit denen Herr Professor E. Mach im Sitzungsberichte der Wiener Akademie vom 9. Juni 1882 bereits begonnen hat.

Dies Alles geschah während des Druckes, so dass eine grössere Zahl von Litteraturvermerken, die dem Verfasser erst jetzt zugänglich wurden, nachträglich eingeschaltet werden musste, wodurch sich einige Unregelmässigkeiten erklären werden.

Zur Erleichterung des Studiums wurde der Stoff eingehend gegliedert. Einzelne Capitel tragen den Charakter von Monographien, die eventuell ausserhalb des Zusammenhangs studirt werden können und bei Vorlesungen als Uebungsbeispiele dienen mögen.

Besonderen Werth hat der Verfasser auf vollständige Coordinaten-Formulirung gelegt, wodurch es ermöglicht wurde, die Lösungen für gewisse geometrische und physikalische Probleme gewissermassen abzulesen. Die ursprüngliche Absicht, den physikalischen Theorien besondere Capitel zu widmen, wurde aufgegeben, um den Umfang nicht allzu sehr anschwellen zu lassen. Zahlreiche Litteraturnachweise am Schlusse der einzelnen Capitel werden jedoch dem Leser den Uebergang zu den wissenschaftlichen Nachbargebieten erleichtern.

Möge das Werk namentlich jüngere Mathematiker, die nicht Gelegenheit hatten, Vorlesungen über den betreffenden Gegenstand zu hören, zu eingehenderem Studium und womöglich zur Mitarbeit auf einem der interessantesten und fruchtbarsten Gebiete der modernen Mathematik anregen.

Hagen, den 2. August 1882.

Dr. G. Holzmüller.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Einleitung 1

Erstes Capitel. Geometrische Deutung der complexen Grössen und der Rechenoperationen mit denselben.

§ 1. Die geometrische Darstellung der complexen Zahlen 7
§ 2. Geometrische Darstellung der Addition und Subtraction 9
§ 3. Die Multiplication und Division 11
§ 4. Die Potenzirung mit ganzem, reellem Exponenten 13
§ 5. Das Radiciren mit ganzem, reellem Exponenten 14
§ 6. Das Potenziren mit gebrochenem und mit irrationalem reellen Exponenten 17
§ 7. Logarithmus und Exponentialfunction 18
§ 8. Litteratur 21

Zweites Capitel. Die Verwandtschaften der Congruenz und Aehnlichkeit.

§ 9. Die Abbildung $Z = z + c$ 24
§ 10. Die Abbildungen $Z = z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und $Z = z(\cos\alpha + i\sin\alpha) + c$ 24
§ 11. Die Abbildungen $Z = cz$ und $Z = cz + c_1$ 24

Drittes Capitel. Die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ und die Inversion oder Transformation mittels reciproker Radii vectores.

§ 12. Allgemeiner Charakter dieser Abbildung 25
§ 13. Analytische Beziehungen zwischen beiden Ebenen 27
§ 14. In welche Curve verwandelt sich der Kreis $P = c$ um den Punkt $(a + bi)$ der Z-Ebene? 28
§ 15. Was entspricht der Geraden $\Theta = \gamma$ durch den Punkt $(a + bi)$? — Isogonalität 31
§ 16. Die Bicircularcoordinaten und ihr Zusammenhang mit den Polarcoordinaten 33
§ 17. Isothermische Eintheilung der Ebene mittels der Bicircularcoordinaten 34
§ 18. Einige geometrische Folgerungen 37
§ 19. Die isogonalen Trajectorien des Kreisbüschels 37
§ 20. Die Erhaltung der Doppelverhältnisse 40
§ 21. Die Erhaltung der Doppelwinkel 41
§ 22. Einige Sätze der Kreisverwandtschaft 43
§ 23. Bedeutung des Differentialquotienten von $Z = \frac{1}{z}$ 45
§ 24. Die behandelten Coordinatensysteme genügen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 46
§ 25. Physikalische Andeutungen 47
§ 26. Einige Beispiele von inversen Curven 52
§ 27. Litteratur 54

Seite

Viertes Capitel. Die Abbildung $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ und die Kreisverwandtschaft.

§ 28. Allgemeiner Charakter dieser Abbildung 55
§ 29. Fälle involutorischen Verhaltens 57
§ 30. Einige andere Fälle nebst Anwendungen 59
§ 31. Einige fundamentale Aufgaben 61
§ 32. Analytische Behandlung der involutorischen Abbildung $Z = \frac{z+1}{z-1}$ 63
§ 33. Dieselbe Aufgabe für den allgemeinen Fall $Z = \frac{(a+bi)z+(c+di)}{(e+fi)z+(h+ki)}$ 66

Fünftes Capitel. Allgemeines über Functionen complexen Arguments und die conforme Abbildung.

§ 34. Welchen Bedingungsgleichungen genügt jede Function complexen Arguments? 67
§ 35. Differentialgleichungen, denen der reelle und der imaginäre Theil der Functionen complexen Arguments für sich genügen 70
§ 36. Ist der reelle Theil einer Function complexen Arguments gegeben, so kann man den imaginären Theil bestimmen 71
§ 37. Der Werth des Differentialquotienten einer Function complexen Arguments ist unabhängig von der Richtung, in der das Argument sich ändert 73
§ 38. Weiteres über den Differentialquotienten 75
§ 39. Die conforme Abbildung 76
§ 40. Die singulären Punkte 77
§ 41. Die isothermischen Curvensysteme 79
§ 42. Ableitung neuer Isothermenschaaren 83
§ 43. Symmetrie und Reciprocität bei gewissen Isothermenschaaren . . . 85
§ 44. Ist w Function von $z = x + yi$ und z Function von $\zeta = \xi + \eta i$, so ist auch w Function von ζ. — Folgerungen aus diesem Satze . 89
§ 45. Ein physikalisches Beispiel zum vorigen Satze 92
§ 46. Höhere Differentialquotienten und Krümmungsradien; kinematische und geometrische Andeutungen 94
§ 47. Litteratur 100

Sechstes Capitel. Die Abbildungen $Z = z^2$ und $z = \sqrt{Z}$ und ihre Beziehungen zur lemniscatischen und cardioidischen Verwandtschaft.

§ 48. Allgemeines über die Abbildungen $Z = z^2$ und $z = \sqrt{Z}$ 103
§ 49. Den Parallelen zur reellen und imaginären Axe der Z-Ebene entsprechen zwei Orthogonalschaaren gleichseitiger Hyperbeln der z-Ebene 105
§ 50. Dem Strahlenbüschel durch einen Punkt $a + bi$ der Z-Ebene und der concentrischen Orthogonalschaar von Kreisen entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte $\sqrt{a+bi}$ und eine Orthogonalschaar confocaler Lemniscaten 107
§ 51. Andere Lemniscatenschaaren nebst ihren isogonalen Trajectorien . 110
§ 52. Einige Sätze über die behandelten Curvensysteme 113
§ 53. Die lemniscatische Geometrie und Kinematik 115
§ 54. Lemniscatische Reciprocität und Verwandtschaft 117
§ 55. Welche Curven entsprechen den Geraden und Kreisen der z-Ebene in der Z-Ebene? 122
§ 56. Litteratur 127

Siebentes Capitel. Verallgemeinerung der lemniscatischen Verwandtschaft. — Ein wichtiger Specialfall.

§ 57. Die ganze Function zweiten Grades 129
§ 58. Eine weitere Verallgemeinerung 130

Seite

§ 59. Die involutorische Abbildung $Z = \sqrt{1 - z^2}$ 131
§ 60. Beispiele zu den Curven gleicher Bogenlängen 137

Achtes Capitel. Die Abbildungen $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ und $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$.

§ 61. Zusammenhang mit den elliptischen Coordinaten 140
§ 62. Untersuchung der Curvensysteme, die beliebigen Strahlenbüscheln und Kreisschaaren der Z-Ebene entsprechen 143
§ 63. Uebertragung der Geometrie der z-Ebene in die der Z-Ebene . . . 150
§ 64. Weiteres über die elliptischen Coordinaten 151
§ 65. Das gegenseitige Entsprechen der Bicircularcoordinaten beider Ebenen mit den Grundpunkten ± 1 154
§ 66. Den Reciproken der elliptischen Coordinaten um ± 1 der Z-Ebene entspricht das Kreisbüschel durch die Punkte $\pm i$ nebst Orthogonalschaar 157
§ 67. Weitere Consequenzen der Kreisbeziehungen beider Ebenen . . . 160
§ 68. Schlussbemerkungen 164
§ 69. Litteratur 165

Neuntes Capitel. Die Abbildungen $z = \sqrt[n]{Z}$ und $z = \sqrt[m]{\frac{aZ^n + b}{cZ^n + d}}$ nebst ihren Umkehrungen.

§ 70. Allgemeines über die Abbildungen $z = \sqrt[n]{Z}$ und $Z = z^n$ bei ganzen, positiven, reellen Exponenten 166
§ 71. Den Geraden der Z-Ebene entsprechen reguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung 168
§ 72. Den Kreisen der Z-Ebene entsprechen reguläre Lemniscaten n^{ter} Ordnung 171
§ 73. Wichtigere Eigenschaften der Hyperbeln n^{ter} Ordnung; die orthogonalen Hyperbelschaaren n^{ter} Ordnung 173
§ 74. Die Eigenschaften der Lemniscaten n^{ter} Ordnung und der aus ihnen hervorgehenden Isothermenschaaren 177
§ 75. Andeutungen über weitere Consequenzen für die Geometrie der Ebene 181
§ 76. Folgerungen für die allgemeine Theorie der Kegelfläche 185
§ 77. Die Kinematik des lemniscatisch-veränderlichen Systems n^{ter} Ordnung und der Kegelfläche 189
§ 78. Litteratur 191

Zehntes Capitel. Die Abbildung mittels ganzer rationaler Functionen und ihrer Umkehrungen.

§ 79. Allgemeines über die zugehörigen Riemann'schen Flächen 193
§ 80. Successiver Aufbau der Riemann'schen Fläche 194
§ 81. Transformation der Kreisschaaren und Strahlenbüschel um resp. durch den Nullpunkt der Z-Ebene 202
§ 82. Transformation beliebiger Kreisschaaren und Strahlenbüschel der Z-Ebene 207
§ 83. Litteratur 211

Elftes Capitel. Abbildung mittels gebrochener rationaler Functionen und ihrer Umkehrungen.

§ 84. Die irregulären Lemniscaten und Hyperbeln von der Ordnung $\frac{n}{m}$, welche zum Nullpunkte der Z-Ebene gehören 212
§ 85. Transformation beliebiger Strahlenbüschel und Kreisschaaren der Z-Ebene 216
§ 86. Die zugehörigen Riemann'schen Flächen 218

Seite

§ 87. Beispiele zu Capitel 11 224
§ 88. Litteratur und Bemerkungen. 231

Zwölftes Capitel. Algebraische Functionen mit Irrationalitäten.

§ 89. Zusammenhang der Wurzeln und Windungspunkte 233
§ 90. Die durchführbaren irrationalen Verwandtschaften 234
§ 91. Litteratur. 235

Dreizehntes Capitel. Die Abbildungen $Z = \lg z$ und $z = e^Z$ und ihre Combinationen mit anderen Verwandtschaften.

§ 92. Die fundamentalen Beziehungen zwischen beiden Ebenen 237
§ 93. Eigenschaften der logarithmischen Spirale 240
§ 94. Kartographisches 241
§ 95. Combinationen mit anderen Verwandtschaften 243
§ 96. Litteratur. 245

Vierzehntes Capitel. Abbildung mittels der Kreisfunctionen und ihrer Umkehrungen.

§ 97. Die Abbildungen $Z = \cos z$ und $z = \arccos Z$. 246
§ 98. Die Abbildung $Z = \sin z$ und ihr Zusammenhang mit $Z = \cos z$. . 251
§ 99. Die Abbildungen $Z = \tan z$ und $z = \arctan Z$ 253
§ 100. Litteratur und Bemerkungen. 255

Fünfzehntes Capitel. Abbildung mittels der elliptischen Functionen und ihrer Umkehrungen.

§ 101. Allgemeines über die Abbildungen $Z = \text{sinam } z$ und

$$z = \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\varkappa^2 Z^2)}}$$ für mod $\varkappa +$, reell und < 1 256

§ 102. Die sinam-Curven und ihre physikalische Bedeutung 263
§ 103. Die Abbildungen $Z = \text{cosam } z$ und $Z = \Delta \text{ am } z$ und ihr Zusammenhang mit $Z = \text{sinam } z$ 268
§ 104. Conforme Abbildung des Rechtecks auf den Einheitskreis. 273
§ 105. Beispiele isogonaler Trajectorien von sinam- und cosam-Curven, verbunden mit einigen Abbildungsaufgaben. 276
§ 106. Litteratur. 280
Schlusswort 282
Nachträge 282

Druckfehler.

Seite 15, Z. 11 v. u. lies $2\pi\varkappa$ statt $2n\varkappa$.
„ 26, Z. 13 v. o. l. Lage st. Bahn.
„ 28, Z. 10 v. u. l. Curve st. Curven.
„ 29, Ueberschrift, l. Transformation des Kreises.
„ 89, Z. 6 v. u. l. z st. $z -$.
„ 101, Z. 5 v. o. l. potentiel st. potential.
„ 147 und 148, Ueberschrift, l. Transformation der Kreise und Geraden.
„ 166, Z. 1 v. o. l. Matematica st. Mathematica.
„ 192, Z. 20 v. u. l. Perimeter st. Parameter.

Nachtrag zum Druckfehlerverzeichniss.

Seite 47, Z. 6 v. o. im ersten Gliede lies $a + bi$ statt $a - bi$.

„ 73, Z. 2 v. o. lies $-\frac{\partial u}{\partial y}dx$ statt $-\frac{\partial u}{\partial x}dx$.

„ 73, Z. 4 v. o. im ersten Integrale lies $\frac{\partial u}{\partial y}$ statt $\frac{\partial u}{\partial x}$.

„ 73, Z. 4 v. o. füge hinzu $+\int dy \int -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dx$.*)

„ 90, Z. 3 v. o. lies $d(\xi + \eta i)$ statt $(d\xi + \eta i)$.

„ 90, Z. 2 v. u. lies $\psi(\xi\eta)$ statt $\psi(\eta)$.

„ 101, Z. 12 v. u. lies Gandersheim statt Gundersheim.

„ 126, Z. 14 v. o. lies Zeichnungen statt Gleichungen.

„ 167, Ueberschrift, lies: Allgemeines über die Abbildung $z = \sqrt[n]{Z}$.

„ 195, Z. 6 v. o. lies ζ_1 statt φ_1.

„ 202, Z. 6 v. u. lies $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ statt $p_1 \cdot p_2 + \cdots + p_n$.

„ 246, Z. 1 v. o. lies Kartographie statt Karthographie.

„ 274, Z. 15 und 16 v. o. Die Bemerkung $\pm 45^0$ und $\pm 135^0$ gehört auf Z. 7 v. u.

„ 288, Z. 21 v. o. lies $\zeta = \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}$ statt $z = \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}$.

*) Vergl. das Capitel über Differentialgleichungen, die per se integrirbar sind, in den Lehrbüchern z. B. Schlömilch, Comp. I, § 106.

Einleitung.

Den ersten Anstoss zur Behandlung der isogonalen Verwandtschaften, deren Begriff unten erläutert wird, hat die Kartographie gegeben. Da nämlich die Kugelfläche nicht zu den abwickelbaren Flächen gehört, ist man genöthigt, zur Darstellung der Erdoberfläche auf der Ebene gewisse Projectionsmethoden anzuwenden, von denen keine im Stande ist, das Bild eines Landes vollkommen ähnlich wiederzugeben. Es entstehen vielmehr gesetzmässige Verzerrungen, von denen man sich auf jeder Erdkarte überzeugen kann.

Besonders wichtig sind diejenigen Abbildungen, bei welchen die den Meridianen und Parallelkreisen entsprechenden Curven sich, wie auf der Kugel, rechtwinklig schneiden, und wo ausserdem an jeder Stelle der Karte das Verhältniss zwischen Längen- und Breitenmaass dasselbe ist, wie beim Original. Diese Karten haben überhaupt die Eigenthümlichkeit, dass beliebige Curven auf ihnen sich unter demselben Winkel schneiden, wie die entsprechenden auf der Kugelfläche. Zwischen Bild und Original besteht also eine geometrische Beziehung, die man mit Siebeck*) zweckmässig als *isogonale Verwandtschaft* bezeichnet.

Da ferner kleine Curvenstücke als geradlinig betrachtet werden können, so entspricht im Allgemeinen jedem verschwindend kleinen Dreieck auf der Kugelfläche ein gleichwinkliges, also ähnliches, auf dem Bilde. Die Abbildung ist also dem Originale *in den kleinsten Theilen ähnlich*, oder, wie C. F. Gauss**) sich ausdrückt, es handelt sich um eine *conforme Abbildung*.

Von diesen Abbildungen sind zwei in den allgemeinen Gebrauch übergegangen, die *stereographische Projection des Ptolemäus*, die eigentlich wohl dem *Hipparch* zugeschrieben werden muss, und die sogenannte *Mercator-Projection*.

*) Siebeck: Ueber graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelles Journal, Bd. 55.

**) C. F. Gauss: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Abhandl. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. II.

Ptolemäus projicirt die Kugelfläche von einem ihrer Punkte aus geradlinig auf die Tangentialebene des gegenüberliegenden Punktes, z. B. vom Nordpole aus auf die Tangentialebene des Südpols. Bei letzterer Darstellung bleibt für die nächste Umgebung des Südpols der Maassstab ungeändert, die Umgebung des Aequators wird, wie man sich leicht überzeugt, in doppeltem Massstabe wiedergegeben, während für die Umgebung des Nordpols, deren Bild in den unendlich fernen Bereich der Ebene fällt, eine unendlichfache Vergrösserung stattfindet. Wegen der damit verbundenen Bildverzerrungen begnügt sich die Praxis in der Regel mit der Darstellung einer Halbkugel, eine Einschränkung, auf welche die mathematische Theorie nicht eingehen kann. Es lässt sich elementar beweisen, dass hier jedem Kreise auf der Kugel ein Kreis in der Ebene entspricht und dass die Abbildung zu den conformen gehört, und zwar geht das Netz der Meridiane und Parallelkreise in ein Strahlenbüschel und die orthogonale concentrische Kreisschaar über.

Wählt man statt des Nordpols einen Punkt des Aequators zum Centrum der Projection, wie es z. B. bei der Darstellung der östlichen und westlichen Halbkugel geschieht, so geht das Gradnetz über in das Kreisbüschel durch zwei Punkte, die dem Nord- und Südpole entsprechen, und in die orthogonale Kreisschaar. Aehnliches geschieht bei ganz beliebiger Wahl des Projectionscentrums auf der Kugelfläche, wodurch Karten entstehen, von denen die Halbkugeln der grössten Land- oder Wassermasse Beispiele geben.

Complicirter ist die Darstellung des *Mercator*. Nach ihm denke man sich um die Kugel einen Berührungscylinder von unendlicher Länge gelegt, der im Aequator berührt. Die Kugeloberfläche denke man sich mittels einer den Logarithmus erfordernden Rechnung durch das Gradnetz in kleine „Quadrate“ eingetheilt, die nach den Polen hin verschwindend klein werden. An die Meridiane lege man im Aequator Tangenten, die in die Cylinderfläche fallen und theile dann auch letztere durch Schnitte, deren Ebene der Aequatorebene parallel ist, in congruente „Quadrate“ ein. Längs einer der Geraden wird nun der Cylinder aufgeschnitten und in die Ebene abgewickelt. Die Gestaltungen der Länder sind jetzt mit beliebiger Genauigkeit in das Netz einzutragen.

Dass diese Abbildung zu den conformen gehört, ergiebt sich sofort aus dem gegenseitigen Entsprechen der kleinen Quadrate. Die Kugelfläche wird hier auf einem unendlich langen Parallelstreifen dargestellt, wobei für den Aequator der Maassstab unverändert bleibt, während die Umgebungen beider Pole in die unendlich fernen Bereiche des Streifens fallen und unendlich-fach vergrössert

werden. So erscheint z. B. auf der Mercatorkarte Grönland weit grösser als Africa. Die Praxis lässt selbstverständlich die Polar-Regionen weg.

Der Vorzug der Mercatorkarte beruht darin, dass die Curven, welche die Meridiane der Kugel isogonal durchsetzen, die sogenannten *Loxodromen*, die dem Wege eines Schiffes entsprechen, welches unveränderten Curs beibehält, als gerade Linien dargestellt werden. Diese Schifffahrtslinien würden auf der Ptolemäischen Karte weit complicirter erscheinen. Die Mercatorkarte eignet sich also besonders zur Seekarte.

Vergleicht man sämmtliche besprochenen Abbildungen, so erkennt man, dass sie unter sich in isogonaler Verwandtschaft stehen. Zwischen den an erster und letzter Stelle besprochenen Karten besteht also z. B. die Beziehung, *dass die unbegrenzte Ebene conform auf einem unendlich langen Parallelstreifen dargestellt ist.*

Dies sind die ersten ohne Kenntniss der allgemeinen Theorie gefundenen Beispiele ebener isogonaler Verwandtschaften.

J. H. Lambert ist der erste, der das Problem der conformen Darstellung der Kugeloberfläche in verallgemeinerter Gestalt zu formuliren suchte. Lagrange, dem er seine Resultate mittheilte, erkannte den Zusammenhang mit der Theorie der Functionen des complexen Arguments $x + yi$, wo $i = +\sqrt{-1}$ ist. Das Wesentliche hierüber findet sich bei Lambert: „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung", 1772, Bd. III, S. 105 — 199. Auf Seite 156 wird die Bemerkung Lagranges mitgetheilt.

Lagrange veröffentlichte die verallgemeinerte Theorie selbstständig in zwei Aufsätzen: „Sur la construction des cartes géographiques"; Mém. de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. 1779.

Im Jahre 1822 stellte die Kgl. Societät der Wissenschaften zu Kopenhagen als Preisfrage *die allgemeine Lösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich werde.* Das Problem wurde von C. F. Gauss gelöst und seine Arbeit in Schumachers *Astronomischen Abhandlungen*, 1825, Heft 3, veröffentlicht. Unaufgeklärt ist es geblieben, warum Gauss der Lagrange'schen Arbeit, „der nur wenig hinzuzusetzen gewesen wäre", keine Erwähnung thut*).

Die wirkliche Integration der Differentialgleichung dieses Problems wird von Gauss nur für Umdrehungsflächen, die auf die Ebene

*) Vergl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866, S. 215.

abgebildet werden, durchgeführt. Die conforme Abbildung des dreiaxigen Ellipsoides auf die Ebene verdanken wir C. G. J. Jacobi*). Die erste Andeutung über die Lösung des Problems gab derselbe im Jahre 1839 in den *Monatsberichten der Berliner Academie*, S. 64, und im 19. Bd. des Crelle'schen Journals, S. 311. Eine vollständige Behandlung derselben Aufgabe lieferte auch E. Schering in der 1858 zu Göttingen gekrönten Preisschrift: *Ueber die conforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene.*

Es ist hier nicht der Ort, specieller auf die einschlagende Litteratur einzugehen. Es sei nur angedeutet, dass die Zahl der Beispiele der conformen Abbildung von Flächen auf Ebenen oder Kugeln besonders durch H. A. Schwarz vermehrt worden ist. Man vergleiche dessen „Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel", Crelle's Journal Bd. 70, und H. Amstein's „Conforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Octaeders auf die Oberfläche einer Kugel", Inauguraldissertation, Zürich 1872, deren Einleitung ein vollständiges Verzeichniss der hierhergehörigen Arbeiten giebt.

Wir dürfen von einem weiteren Eingehen auf dieses Gebiet um so mehr absehen, als es sich in Folgendem wesentlich nur um die *ebenen* isogonalen Verwandtschaften handelt, bei welchen der von Lagrange entdeckte Zusammenhang mit der Theorie der Functionen complexen Arguments am reinsten hervortritt. Das Fundamentalwerk für dieses Gebiet ist die berühmte Inaugural-Dissertation von B. Riemann: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse", Göttingen 1859, welche zum Ausgangspunkte eines wichtigen Theiles der modernen mathematischen Litteratur geworden ist. Im 21. Artikel derselben beweist Riemann mit Hülfe des Dirichlet'schen Princips, an dessen Stelle übrigens aus Gründen der Strenge neuere Methoden gesetzt werden müssen, folgenden Satz: „Zwei gegebene einfach zusammenhängende ebene Flächen können stets so aufeinander bezogen werden, dass jedem Punkte der einen *ein* mit ihm stetig fortrückender Punkt der anderen entspricht und ihre entsprechenden kleinsten Theile ähnlich sind; und zwar kann zu *einem* inneren Punkte und zu *einem* Begrenzungspunkte der entsprechende beliebig gegeben werden; dadurch aber ist für alle Punkte die Be-

*) Crelle's Journal, Bd. 59. Ueber die Abbildung eines ungleichseitigen Ellipsoids etc. Aus hinterlassenen Papieren Jacobis mitgetheilt von L. Cohn. Ferner: Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. Vorl. 28 (Berlin 1866), und Jacobi, gesammelte Werke. Bd. III. Berlin 1871.

ziehung bestimmt.“ Die Aufgabe, eine gegebene ebene Fläche auf einer anderen conform darzustellen, kommt danach hinaus auf die Bestimmung einer Function complexen Arguments aus gewissen Bedingungen. Da aber eine solche Function, ebenso wie ihr reeller und ihr rein imaginärer Theil, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt, so handelt es sich um die Integration dieser Differentialgleichung unter gewissen vorgeschriebenen Bedingungen.

Auf der Integration dieser Differentialgleichung beruht aber auch die Lösung gewisser Probleme der *Wärmetheorie* (speciell der Lehre von den isothermischen Curvensystemen), der *Electrodynamik* (besonders die Untersuchung der constanten electrischen Strömung in ebenen Platten), und endlich der *Hydrodynamik* (Untersuchung der Bewegung eingeschlossener Flüssigkeiten und freier Ausströmungsstrahlen unter gewissen vereinfachenden Annahmen). Nimmt man dazu die schon besprochenen Probleme der *Kartographie* und die in neuester Zeit angebahnte *Kinematik conform veränderlicher Systeme*, so erkennt man, wie die Theorie der isogonalen Verwandtschaften in engem Zusammenhange mit den tiefsten Fragen der Mathematik und der mathematischen Physik steht.

Zwei Wege giebt es nun, in die Theorie der conformen Abbildung einzudringen, den *analytischen* und den *synthetischen*.

Der analytische Weg folgt der von Riemann angedeuteten Methode, zu welcher wir in neuerer Zeit durch Schwarz*) und andere vollständig durchgeführte Beispiele erhalten haben. Eine abgeschlossene Theorie lässt sich aber in dieser Richtung noch nicht geben. Ausserdem verlangt sie besondere Vorkenntnisse, namentlich hinsichtlich der anzuwendenden Coordinatensysteme.

Zur Kenntniss der letzteren gelangt man für zahlreiche Fälle auf synthetischem Wege. Dass der letztere sozusagen unentbehrlich ist, dafür sei C. G. J. Jacobi citirt, der in der 26. der Vorlesungen über Dynamik sich folgendermassen äussert:

„Die Hauptschwierigkeit bei der Integration gegebener Differentialgleichungen scheint in der Einführung der richtigen Variabelen zu bestehen, zu deren Auffindung es keine allgemeine Regel giebt. Man muss daher das umgekehrte Verfahren einschlagen und nach erlangter Kenntniss einer merkwürdigen Substitution die Probleme aufsuchen, bei denen dieselbe mit Glück zu gebrauchen ist.“

---

*) Vgl. besonders H. A. Schwarz, Ueber einige Abbildungsaufgaben. Crelle's Journal, Bd. 70.

An dem Beispiele der elliptischen Coordinaten zeigt er dann die Fruchtbarkeit dieses Verfahrens und löst unter Anderem die oben erwähnte Abbildung des dreiaxigen Ellipsoids auf die Ebene.

Dieser synthetische Weg soll nun in Folgendem in der Art eingeschlagen werden, dass die einfachsten und gebräuchlichsten Functionen complexen Arguments zur Untersuchung kommen. Bei jeder derselben wird gezeigt, wie sie zur Ausdehnung der geometrischen Kenntnisse verwerthet werden kann und besonders zu neuen Coordinatensystemen Anlass giebt. Speciell wird noch auf die mathematisch-physicalische Problemgruppe hingewiesen, welche durch die Kenntniss der neuen Coordinaten lösbar wird.

Da die neuere Functionentheorie die angedeutete Darstellungsweise nicht entbehren kann, besonders aber die Theorie der Riemann'schen Flächen mit ihren Windungspunkten dem Anfänger an bestimmten Beispielen verdeutlicht werden muss, wird sich das Folgende überhaupt zur Einführung in die modernen Anschauungsweisen eignen, eventuell in Verbindung mit den *Elementen der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse von* H. Durège (2. Auflage, Leipzig 1873).

Unsere Betrachtungen werden sich auf die ganzen und gebrochenen rationalen Functionen und ihre Umkehrungen, auf die einfachsten transcendenten und die fundamentalen elliptischen Functionen beschränken.

Das Maass der verlangten Vorkenntnisse ist dasjenige, welches bei Studirenden der ersten Semester vorausgesetzt werden kann. Zur Erleichterung des Verständnisses wird nach der Einführung in die geometrische Darstellungsweise der complexen Zahlen zunächst das Beispiel der Kreisverwandtschaft speciell besprochen und erst dann Allgemeineres über die isogonalen Verwandtschaften abgeleitet.

Erstes Capitel.

Geometrische Deutung der complexen Grössen und der elementaren Rechnungsoperationen mit denselben.

§ 1. Die geometrische Darstellung der complexen Zahlen.

Die Darstellung sämmtlicher *reeller* Zahlen, also der positiven und negativen, der ganzen und gebrochenen, der rationalen und irrationalen, auf einer geraden Linie, auf welcher ein beliebiger Punkt zum Nullpunkt, ein anderer willkürlich zum Punkte 1 gemacht ist, wird als bekannt vorausgesetzt. Erst durch Einführung der irrationalen Zahlen ist dabei dem Begriffe der Stetigkeit in dem Sinne Rechnung getragen, dass jedem Punkte der Geraden eine bestimmte reelle Zahl und umgekehrt jeder reellen Zahl ein Punkt der Linie entspricht. Wandert also ein Punkt auf der Geraden von $-\infty$ über Null nach $+\infty$, so entspricht dieser Wanderung das stetige Anwachsen einer veränderlichen reellen Grösse von $-\infty$ über 0 bis $+\infty$.

Ferner wird als bekannt vorausgesetzt, dass die Ausdehnung des Radicirens auf negative Zahlen mit derselben Nothwendigkeit auf die rein imaginären Zahlen führt, wie die Subtraction positiver Zahlen, bei denen der Subtrahend den Minuenden übertrifft, zur Einführung der negativen Zahlen zwingt, wie ferner die Division mittels ganzer Zahlen auf den Begriff der gebrochenen, das Radiciren positiver Zahlen auf die Definition der Irrationalzahlen führt. Die rein imaginären Zahlen sind, wie bekannt, von der Form $q \cdot \sqrt{-1}$, oder, um die durch C. F. Gauss eingebürgerte Schreibweise beizubehalten, nach welcher $+\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird, von der Form qi. Die Addition reeller und rein imaginärer Zahlen endlich führt auf den Begriff der *complexen Grössen*, die von der Form $p + qi$ sind.

Ueber das Rechnen mit complexen Zahlen vergleiche man die Lehrbücher der Analysis, welche die Möglichkeit der Ausdehnung aller mathematischen Operationen auf das neue Gebiet nachzuweisen haben. Ueber die historische Entwickelung der Theorie der complexen Zahlen und über die eigenthümlichen Schwierigkeiten, die sich ihrer Einführung entgegensetzten, vergleiche man Hankel: Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen (Leipzig 1867), S. 71—72 und 81—83; ferner die Einleitung von Durège:

Elemente der Theorie der Functionen etc.; Klügel: Mathematisches Wörterbuch, Artikel Algebra, etc.

Uns beschäftigt hier lediglich die *geometrische Darstellung* der complexen Zahlen, die gewöhnlich als die Gauss'sche bezeichnet wird. Nach Hankel ist Argand als der wahre Begründer dieser Darstellung zu betrachten, der im Jahre 1806 zu Paris einen „Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques" herausgab. Die Gauss'sche Darstellung datirt erst vom Jahre 1831. Im 2. Bande der Gauss'schen Werke S. 169—178 findet man die Anzeige der Theoria residuorum biquadraticorum. Auf S. 171 wird dort zum ersten Male die Bezeichnung „complexe Zahlen" gebraucht, während auf S. 174 die geometrische Darstellungsweise zur Sprache kommt. Muss demnach Gauss auf die Priorität verzichten, so gebührt ihm doch das Verdienst, die complexen Zahlen und ihre geometrische Darstellung im wahren Sinne des Wortes eingebürgert zu haben. Die Gauss'sche Abhandlung selbst (Commentatio II) erschien 1832.

Diese geometrische Darstellung beansprucht die unbegrenzte Ebene*), denn die oben besprochene Gerade ist durch die Gesammtheit der reellen Zahlen vollständig erfüllt, so dass die zweite Dimension zu Hülfe genommen werden muss, und zwar stellt man die rein imaginären Zahlen auf einer Geraden dar, die im Nullpunkte senkrecht auf der Geraden der reellen Zahlen steht. Sämmtliche complexe Zahlen erfüllen dann stetig die ganze Ebene, und zwar so, dass jeder Zahl $x + yi$ ein Punkt mit den Coordinaten x und y entspricht, wodurch zugleich über die Vorzeichen disponirt ist. Durch Fig. 1 erläutert sich alles Wesentliche in einfacher Weise. Dort ist z. B. durch den Punkt A die Zahl $2 + i$ dargestellt.

Diese Darstellungsweise steht im Einklang mit der Symmetrie des complexen Zahlensystems und mit der Möglichkeit, jede complexe Zahl $x + yi$ auf die Form $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ zu reduciren, die den Polarcoordinaten entspricht. Wird nämlich festgesetzt, dass complexe Zahlen nur dann gleich sind, wenn ihre reellen und ihre imaginären Theile übereinstimmen, so folgt $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, also durch Quadriren und Addition

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2.$$

Es ist also $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, während durch Division entsteht $\frac{y}{x} = \tan\varphi$,

*) Versuche, complexe Zahlensysteme aufzustellen, welche drei Dimensionen beanspruchen, sind gemacht worden, ohne dass jedoch irgend ein Fortschritt dadurch erzielt wäre. Vgl. Gauss, Gött. Anzeigen 1831, Stück 14. Schlussbemerkung.

also $\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Hier haben alle Wurzeln das positive Vorzeichen, so dass unter r stets eine positive Länge verstanden wird.

Die Grösse $r = \sqrt{x^2+y^2}$ bezeichnete zuerst Argand in der citirten Abhandlung als *„Modul"* der complexen Zahl $x + yi$. In neuerer Zeit ist dafür der Name *„absoluter Betrag"* der complexen Zahl gebräuchlicher geworden. Der Ausdruck *„reducirte Form"* für $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ rührt von Cauchy her (Cours d'analyse, 1828). Gauss gebraucht für $r^2 = x^2 + y^2$ die Bezeichnung *„Norm"*. Die Bogengrösse φ wurde früher als *Argument*, in neuerer Zeit zweckmässiger als *„Abweichung"* bezeichnet. Die Grösse $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ heisst entsprechend der *Richtungscoefficient*.

Statt nun zu sagen, die complexe Grösse $x + yi$ werde durch den Punkt A (Fig. 1) mit den Coordinaten x und y oder r und φ dargestellt, kann man auch sagen, sie werde dargestellt durch die *Strecke* OA, d. h. durch eine Linie von der Länge r und der durch φ bezeichneten Abweichung, ganz unabhängig von dem Ausgangspunkte der Strecke, von der also anzunehmen ist, dass sie sich durch Parallelverschiebung nicht ändert. Bei der Darstellung reeller Zahlen entspricht dies dem Umstande, dass zu gleichen Zahlendifferenzen gleiche Stücke der Geraden gehören, bei der Darstellung der complexen Zahlen, wie sich sofort zeigen wird, dass zu gleichen Zahlendifferenzen gleiche Strecken gehören. Vor Allem ermöglicht aber diese Bestimmung die geometrische Deutung der Addition und Subtraction complexer Zahlen. — Sind in Folgendem A und B zwei Punkte der Ebene, so soll AB stets die entsprechende Strecke, $\overline{AB}$ die Länge derselben bedeuten.

§ 2. Geometrische Darstellung der Addition und Subtraction.

Es ist

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

also giebt die Addition dieser beiden complexen Zahlen, die durch die Punkte A_1 und A_2 in Fig. 2 dargestellt sein mögen, eine durch den Punkt A repräsentirte Zahl, dessen Abscisse $OD = x_1 + x_2$ und dessen Ordinate $DA = y_1 + y_2$ ist. Offenbar ist Dreieck $A_1EA \simeq OD_2A_2$, also die Strecke A_1A identisch mit der Strecke OA_2 (nach Länge und Richtung). Die Addition kann also auch geschehen durch Aneinanderlegen der Strecken OA_1 und OA_2. Da übrigens OA_1AA_2 ein Parallelogramm ist, erhält man denselben Punkt, wenn man die Reihenfolge der Addition umkehrt. *Analog mit der Addition der*

Kräfte in der Statik führt also Addition zweier Strecken auf die Diagonale des aus ihnen zu bildenden Parallelogramms.

Haben beide Strecken dieselbe Abweichung, so werden ihre Längen addirt, sind sie entgegengesetzt gerichtet, d. h. ist die Abweichung der einen φ, die der andern $\varphi + 180^0$, so entsteht durch Addition eine Strecke, deren Länge die Differenz der beiden gegebenen ist, deren Richtung aber mit der der längeren Strecke übereinstimmt. In allen anderen Fällen ist die Länge $\overline{OA}$ kleiner als die Summe der Längen $\overline{OA_1}$ und $\overline{OA_2}$, aber grösser als ihre Differenz. Die wirkliche Berechnung von r und φ macht keine Schwierigkeiten. In gleicher Weise kann man eine grössere Anzahl von Strecken aneinandersetzen, wobei wiederum die Reihenfolge gleichgültig ist.

Die Addition der Strecken ist von Möbius*) wissenschaftlich begründet und dazu verwendet worden, aus Sätzen der Longimetrie direct auf Sätze der Planimetrie zu schliessen, d. h. Sätze über Punkte auf einer Geraden in solche über Punkte in der Ebene zu übersetzen.

Es lassen sich schon jetzt aus einfachen Zahlengesetzen geometrische Sätze ableiten. Hierzu vergleiche man die Siebeck'sche Abhandlung im 55. Bande des Crelle'schen Journals.

Beispielshalber suche man zu beweisen, dass, wenn z_1 und z_2 zwei complexe Zahlen bedeuten, denen die Punkte A_1 und A_2 entsprechen, die Zahl $\frac{z_1+z_2}{2}$ durch den Halbirungspunkt der Verbindungslinie von A_1 und A_2 dargestellt wird.

Die *Subtraction* ist durch das Vorhergehende bereits erklärt. In Fig. 2 ist Strecke $OA_1 + OA_2 = OA$, folglich Strecke

$$OA - OA_2 = OA_1,$$

wofür man auch sagen könnte $OA + (-OA_2) = OA_1$, oder $OA + A_2O = OA_1$. Folglich: *Man subtrahirt eine Strecke von einer andern, indem man die entgegengesetzte der ersteren zur zweiten addirt.* Dass dies ganz der Formel

$$(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i$$

entspricht, ist selbstverständlich. Auf die Identität $OA - OA_2 = OA + A_2O$ ist besonders zu achten.

---

*) Verhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-physic. Klasse, Jahrg. 1852, Seite 41—54; Jahrg. 1853, Seite 14—24. Vergl. auch Crelle's Journal Bd. 28, Seite 1. Das Studium der tiefsinnigen Abhandlungen dieses Geometers ist in jeder Hinsicht zu empfehlen.

An dieser Stelle lässt sich leicht beweisen, dass, wie oben behauptet, zu gleichen complexen Zahlendifferenzen gleiche Strecken gehören.

§ 3. Die Multiplication und Division.

Die Multiplication zweier reeller Strecken a und b geschieht bekanntlich mit Hülfe der Proportion $1 : a = b : x$, aus welcher folgt $x = ab$. Die Multiplication einer complexen Zahl mit einer reellen bietet nichts Neues. Die Länge der neuen Strecke wird wie vorher gefunden, die Abweichung bleibt ungeändert. Beides ist als specieller Fall enthalten in der Multiplication complexer Strecken.

Statt

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

betrachte man die reducirte Form

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2\Big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\Big]$$

$$= r_1 r_2\Big[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big].$$

Die das Product darstellende Strecke hat also die mit Hülfe der Proportion $1 : r_1 = r_2 : r$ zu construirende Länge $r = r_1 r_2$ und die Abweichung $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Also:

Bei der Multiplication complexer Strecken werden die Längen derselben multiplicirt, ihre Abweichungen addirt.

Die Reihenfolge ist bei der auf mehrere Strecken ausgedehnten Operation gleichgültig.

In Figur 3 sind die gegebenen Strecken OA_1 und OA_2 unter Festsetzung von OB als Einheit in dieser Weise mit einander multiplicirt, d. h. OA_2 ist um den Winkel φ_1 gedreht und r_2 im Verhältniss $1 : r_1$ vergrössert worden. Aus der Proportionalität der Seiten und der Gleichheit der Winkel bei O folgt übrigens die Aehnlichkeit der Dreiecke OBA_1 und OA_2A, durch welche geometrisch documentirt wird, dass OA aus OA_2 in derselben Weise gebildet wird, wie OA_1 aus OB.

Von besonderer Wichtigkeit ist folgender *Specialfall:* Die beiden complexen Zahlen mögen sein $x + yi$ und $x - yi$, d. h. sie sollen sich nur um das Vorzeichen des imaginären Theils unterscheiden. Dann entsteht durch Multiplication die leicht zu construirende *reelle* Zahl

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = r^2.$$

Man construire dies zur Uebung geometrisch nach der vorigen Regel. Bekanntlich werden solche complexe Zahlen als *conjugirte* bezeichnet.

Beispielshalber folgt noch aus den Gleichungen

$$\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i,$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-i,$$

dass der Multiplication einer Zahl mit $+i$ eine Drehung um 90^0, der Multiplication mit $-i$ eine Drehung um -90^0 entspricht. Ueberhaupt entspricht der Multiplication mit $(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ eine Drehung um α ohne Veränderung der Länge. Der Name Richtungscoefficient ist also sehr bezeichnend. So giebt z. B. Multiplication mit $(\cos\pi+i\sin\pi)=-1$ die entgegengesetzte Strecke.

Die *Division* reeller Strecken r und r_2, d. h. die Bildung des Quotienten $\frac{r}{r_2}$ erfolgt mit Hülfe der Proportion $r:r_2=x:1$ in bekannter Weise. Die Division complexer Strecken ergiebt sich demnach leicht aus der Formel

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r}{r_2}\left[\cos(\varphi-\varphi_2)+i\sin(\varphi-\varphi_2)\right].$$

die sich aus der oben gegebenen sofort ablesen lässt, da auch dort $\varphi_1=(\varphi-\varphi_2)$ ist. *Es ist also r im Verhältniss $r_2:1$ zu verkleinern und OA (Fig. 3) um den Winkel $-\varphi_2$ zu drehen.* Mit andern Worten: *Man construire zu dem gegebenen Dreieck OAA_2 das ähnliche und ähnlich liegende Dreieck OBA_1, wo $\overline{OB}=1$ ist.* Zur Uebung construire man auch den Quotienten $\frac{OA_2}{AO}$.

Ist der Divisor reell, so bleibt die Abweichung ungeändert; ist das r_2 des Divisors gleich 1, so findet nur die Drehung statt, Division durch $+i$ giebt Drehung um -90^0, Division durch $-i$ Drehung um 90^0, Division durch -1 giebt wieder die entgegengesetzte Strecke.

Der *reciproke Werth* einer complexen Strecke beruht auf der Construction von $\frac{1}{r}$ mittels der Proportion $r:1=1:x$ und der Bildung von $-\varphi$ an Stelle von φ, denn

$$\frac{1}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{r}\left[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\right].$$

Von Wichtigkeit ist noch folgende Bemerkung: Sollen die beiden Quotienten

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)} \quad \text{und} \quad \frac{R(\cos\Phi+i\sin\Phi)}{R_1(\cos\Phi_1+i\sin\Phi_1)}$$

gleich sein, so muss nach dem Moivre'schen Satze

$$\frac{r}{r_1} = \frac{R}{R_1} \quad \text{und} \quad (\varphi - \varphi_1) = (\Phi - \Phi_1)$$

sein. Werden also die Zahlen durch Punkte a und a_1, resp. A und A_1 dargestellt, so müssen die Dreiecke Oaa_1 und OAA_1 ähnlich sein (Proportionalität zweier Seiten und Gleichheit der eingeschlossenen Winkel). Dies konnte auch direct aus Fig. 3 geschlossen werden, da beide Dreiecke dem $\triangle OBA_1$ ähnlich sein müssen.

§ 4. Die Potenzirung mit ganzem, reellem Exponenten.

Der Exponent n sei zunächst ganz, reell und *positiv*. Die Anwendung der obigen Formeln auf gleiche Factoren führt auf die Gleichung

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Die geometrische Darstellung ist eine Anwendung der ersten Regel des vorigen Paragraphen. Es ergiebt sich eine Aufeinanderfolge ähnlicher Dreiecke. So ist z. B. in Figur 4 die 3te Potenz der Strecke OA_1 gebildet. Die Punkte A_0, A_1, A_2, A_3, ... A_n liegen bei solchen Constructionen stets auf einer *logarithmischen Spirale*, für welche bekanntlich der Radiusvector geometrisch zunimmt, wenn sich die Abweichung desselben arithmetisch ändert. Die Regel der Potenzirung ist leicht in Worte zu kleiden.

Der Fall des *negativen* Exponenten erläutert sich durch die Formel

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{-n} = \frac{1}{\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n}$$
$$= \frac{1}{r^n}\left[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)\right].$$

Man kann demnach entweder den reciproken Werth von

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n$$

nach oben angegebener Methode bilden, oder einfach die Construction der Figur 4 von OA_0 aus nach unten fortsetzen, d. h. die logarithmische Spirale nach unten hin ergänzen.

Es wird sich später zeigen, dass die Potenzen von OA_1 mit reellem gebrochenem Exponenten durch Punkte derselben logarithmischen Spirale dargestellt werden.

Solche Constructionen finden vielfache Anwendung in der graphischen Statik.

Nach Obigem ist man jetzt im Stande, für jedes reelle, ganze n und für jeden speciellen Werth der veränderlichen Grösse $x + yi$ die complexe Zahl

$$X + Yi = (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i)(x + yi) + (a_2 + b_2 i)(x + yi)^2 + \cdots + (a_n + b_n i)(x + yi)^n$$

mit elementaren Hilfsmitteln geometrisch darzustellen. Es handelt sich nur um eine Combination der gegebenen Constructionen.

Es ist zweckmässig, das Verfahren an Functionen niederen Grades einzuüben.

Bei dieser Gelegenheit sei darauf aufmerksam gemacht, dass das Product conjugirter Quotienten

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{a-bi}{c-di} = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$$

stets *reell* ist. Daraus folgt, dass rationale conjugirte Ausdrücke, mit einander multiplicirt, stets Reelles geben.

Dagegen reicht es nicht aus, in einer rationalen Function $f(x + yi)$ an Stelle von $x + yi$ die conjugirte Variabele $x - yi$ zu setzen, um den conjugirten Ausdruck zu erhalten, so dass also im Allgemeinen $f(x + yi) \cdot f(x - yi)$ nicht Reelles giebt. Um dies zu erzielen, muss man auch für die Constanten der Function die conjugirten Werthe einsetzen, also eine gewisse neue Function $f_1(x - yi)$ bilden.

§ 5. Das Radiciren mit ganzem, reellem Exponenten.

Als erstes Beispiel sei die *Quadratwurzel* behandelt.
Es ist zunächst

$$\sqrt{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\left[\cos\tfrac{\varphi}{2} + i\sin\tfrac{\varphi}{2}\right].$$

Die Construction ergiebt sich daraus, dass $\sqrt{r}$ die mittlere Proportionale zwischen 1 und r ist. Man bilde diese und halbire ausserdem den Winkel φ. So ist z. B. in Figur 5 OA_1 die Wurzel aus der Strecke OA. Eine leichte Ueberlegung zeigt, dass, wie oben bemerkt war, A_1 auf der durch O, B und A bestimmten logarithmischen Spirale liegt.

Der Punkt A entspricht aber nicht nur der Grösse $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, sondern auch der Grösse $r\left[\cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi)\right]$, so dass gleichzeitig

$$\sqrt{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right]$$

ist. Dieser Werth wird durch die Strecke OA_2 dargestellt, welche die entgegengesetzte von OA_1 ist.

Die Betrachtung von $r\left[\cos(\varphi + 2n\pi) + i\sin(\varphi + 2n\pi\right]$ giebt keine neuen Punkte.

Also: *Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer complexen Strecke ist mit elementaren Hilfsmitteln möglich und führt stets auf zwei entgegengesetzte Strecken.*

Bei Bildung der *Cubikwurzel* findet man *drei* gleichberechtigte Werthe, denn $\sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ führt, wenn man nicht nur φ, sondern noch $\varphi + 2\pi$ und $\varphi + 4\pi$ in Betracht zieht, auf $\sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right]$, $\sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right)\right]$ und $\sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right)\right]$. *Die drei entsprechenden Punkte liegen demnach sämmtlich auf einem Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius* $\sqrt[3]{r}$, *und zwar bilden sie ein gleichseitiges Dreieck.* In Figur 6 ist die Construction durchgeführt. A_1, A_2 und A_3 stellen die Cubikwurzeln von A vor.

Eine elementare Construction ist in diesem Falle nicht möglich. Denn erstens kann man die Trisection des Winkels im Allgemeinen nicht durchführen, zweitens bedarf man zur Darstellung von A_1 der obigen durch O, B und A bestimmten logarithmischen Spirale, wie sich sofort aus der Gleichung $(OA_1)^3 = OA$ ergiebt. Statt dessen kann man auch $\sqrt[3]{r}$ auf beliebig viele Decimalstellen berechnen und den Annäherungswerth als Radius benutzen.

Für die n^{te} *Wurzel* gilt Aehnliches. Es ist

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2nk}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2nk}{n}\right],$$

wo k der Reihe nach die ganzzahligen Werthe von 0 bis $n - 1$ annimmt. *Man erhält also n Punkte auf einem Kreise um O mit dem Radius* $\sqrt[n]{r}$. Einer dieser Punkte hat die Abweichung $\frac{\varphi}{n}$, sämmtliche bilden ein regelmässiges n-Eck. Nur in Specialfällen ist die genaue Construction mit elementaren Hilfsmitteln möglich.

Schon an dieser Stelle sei einer wichtigen Riemann'schen Anschauungsweise gedacht. Man denke sich zwei Ebenen, deren eine alle complexen Zahlen $z = x + yi$ enthält, während in der anderen alle complexen Zahlen $Z = X + Yi$ liegen. Beide Ebenen werden dadurch in gegenseitige Beziehung gebracht, dass $X + Yi$

$= \sqrt[n]{x + yi}$ gesetzt wird. Jedem Punkte der z-Ebene entsprechen dann n Punkte der Z-Ebene, die nach obiger Methode zu construiren sind. Berücksichtigt man nur den ersten der n Wurzelwerthe, so liegen die Punkte der Z-Ebene, die allen Punkten der z-Ebene entsprechen, in einem Sector, der durch die reelle Axe und eine Gerade durch den Nullpunkt mit der Neigung $\frac{2\pi}{n}$ gebildet wird. Ebenso führt die Berücksichtigung des 2ten Wurzelwerthes auf den von $\frac{2\pi}{n}$ bis $\frac{4\pi}{n}$ reichenden Sector u. s. w. Die z-Ebene entspricht also jedem der vorhandenen n Sectoren der Z-Ebene. Riemann sucht an Stelle der n-Deutigkeit eine Eindeutigkeit des Ortes zu setzen, indem er annimmt, dass die z-Ebene aus n übereinanderliegenden Schichten bestehe, deren jede einem bestimmten Sector entspricht, und zwar ist die Reihenfolge der Schichten dieselbe, wie die der Sectoren. Da aber im Nullpunkte beider Ebenen die Vieldeutigkeit aufhört, denn es ist $\sqrt[n]{0} = 0$, so sind alle Ebenen im Nullpunkte zusammenhängend zu denken. Um den Uebergang von einem Blatte in das andere zu versinnlichen, denke man sich die n Schichten der z-Ebene wie eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Steigungshöhe um eine im Nullpunkt errichtete Axe herumgewunden. Einem Punkte also, der in der Z-Ebene auf einem Kreise einmal um den Nullpunkt wandert und die n Sectoren der Reihe nach passirt, entspricht ein Punkt der z-Ebene, der auf einem bestimmten Kreise n mal um den Nullpunkt geht, beim Ueberschreiten der positiven reellen Axe aus der 1ten Schicht in die 2te, 3te, ... n^{te} und schliesslich in die oberste zurückgelangt.

In Figur 7 ist die der Quadratwurzel entsprechende zweischichtige „*Windungsfläche*“ dargestellt. Während ein Schnitt links von O zwei Parallelen giebt, würde ein Schnitt rechts von O zwei sich kreuzende Parallelen geben. Man nennt diese Fläche die *Windungsfläche* 1ter *Ordnung*. Bei der n^{ten} Wurzel erhält man eine n-schichtige Fläche, die Windungsfläche $(n - 1)^{ter}$ Ordnung. —

Diese für tiefere analytische Untersuchungen höchst wichtige Anschauungsweise kann hier nur angedeutet werden. Wir kommen später auf dieselbe zurück. —

Das Radiciren mit *negativem*, ganzem, reellem n bietet nichts Neues, erledigt sich vielmehr, da

$$\sqrt[-n]{z} = z^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{z}}$$

ist, durch den reciproken Werth von $\sqrt[n]{z}$.

§ 6. Das Potenziren mit gebrochenem und mit irrationalem reellen Exponenten.

Es seien m und n zunächst ganze positive Zahlen, dann ist

$$Z = z^{\frac{m}{n}} = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{m}{n}}$$

$$= r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\varphi + 2\varkappa\pi)\right],$$

wo es ausreicht, k die ganzzahligen Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen zu lassen.

Im Allgemeinen muss man sich, wie vorher, mit einer Annäherungsconstruction begnügen, die sich auf Zahlenberechnung stützt. Wie die Punkte, welche einem gegebenen entsprechen, liegen, erkennt man am leichtesten, indem man nach den behandelten Regeln erst die n^{te} Wurzel auszieht, dann zur m^{ten} Potenz erhebt. Demnach liegen die n Punkte auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius $r^{\frac{m}{n}}$ um den Nullpunkt und folgen aufeinander im Winkelabstande von $\frac{m}{n}360^0$, *so dass sich n Punkte auf m Umgänge vertheilen.* Die Z-Ebene besteht also aus m Schichten und ist eine Windungsfläche $(m-1)^{ter}$ Ordnung.

Während $Z = z^{\frac{m}{n}}$ n-deutig ist, stellt sich die umgekehrte (inverse) Function $z = Z^{\frac{n}{m}}$ als m-deutig dar. Während also der einfachen z-Ebene in der andern ein Sector von $\frac{m}{n}360^0$ entspricht, der einfachen Z-Ebene in der andern ein Sector von $\frac{n}{m}360^0$, entsprechen den m Blättern der Z-Ebene n Blätter der z-Ebene. Man hat demnach zu vergleichen eine Windungsfläche $(m-1)^{ter}$ Ordnung mit einer solchen $(n-1)^{ter}$ Ordnung.

Ist der Quotient $\frac{m}{n}$ negativ, so erledigt sich das Ganze wie vorher durch Betrachtung des reciproken Werthes.

Ist hingegen der Exponent t eine Irrationalzahl, so wird

$$Z = z^t = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^t$$

$$= r^t\left[\cos t(\varphi + 2k\pi) + i\sin t(\varphi + 2k\pi)\right],$$

wo jedoch die unendlich vielen ganzzahligen Werthe, die k annehmen

men kann, stets neue Resultate geben. Die Function $Z = \varepsilon^t$, ebenso die umgekehrte Function $\varepsilon = Z^{\frac{1}{t}} = Z^{\frac{1}{t}}$, ist also unendlich viel-deutig. In der Z-Ebene liegen z. B. die unendlich vielen Punkte, welche einem gegebenen der ε-Ebene entsprechen, auf der Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt mit dem annähernd zu berechnenden Radius r^t, und sie folgen aufeinander im Winkelabstande $t\,360^0$, oder im Bogenabstande $2\pi t$. Der Kreis wird also unendlich oft durchlaufen. Die Z-Ebene, und ebenso die ε-Ebene, ist demnach eine *Windungsfläche von unendlich hoher Ordnung.*

Der Fall des *imaginären* Exponenten kann erst bei Gelegenheit der Exponential-Function und des natürlichen Logarithmus behandelt werden. Er erledigt sich durch die Bemerkung, dass

$$X + Yi = (x + yi)^{(a+bi)}$$

auch geschrieben werden kann

$$X + Yi = e^{(a+bi)\lg(x+yi)}.$$

§ 7. Natürlicher Logarithmus und Exponentialfunction.

Dieses schwierigere Capitel wird vorausgeschickt, da schon in den nächsten Abschnitten einige Anwendungen desselben nöthig werden.

Bekanntlich ist $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{\varphi i}$, also $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{\varphi i}$. Man kann demnach schreiben

$$\lg\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] = \lg r + \lg e^{\varphi i} = \lg r + \varphi i,$$

oder

$$X + Yi = \lg(x + yi) = \lg\sqrt{x^2 + y^2} + i\arctan\frac{y}{x}.$$

Hieraus folgt $X = \lg\sqrt{x^2 + y^2} = \lg r$ und $Y = \arctan\frac{y}{x} = \varphi$. Um also zu einem Punkte $x + yi$ einer Ebene (der ε-Ebene) den Punkt $X + Yi = \lg(x + yi)$ zu bilden, der in der Z-Ebene dargestellt werden mag, construire man mit Hülfe entsprechender Berechnung angenähert einen Punkt mit den Coordinaten

$$X = \lg\sqrt{x^2 + y^2} = \lg r \quad \text{und} \quad Y = \arctan\frac{y}{x} = \varphi$$

(der Bogen φ ist gestreckt als Ordinate einzutragen). Da nun aber φ beliebig um $2k\pi$ vergrössert oder verkleinert werden kann, so erkennt man sofort, dass $\lg(x + yi)$ unendlich vieldeutig ist, und zwar mit der Periode $2\pi i$.

Man berücksichtige zunächst nur die Werthgruppe ohne den periodischen Zusatz. Dann ergiebt sich, dass den Punkten der ganzen z-Ebene die Punkte eines unendlich langen Flächenstreifens entsprechen, der durch die Linien $Y = 0$ und $Y = 2\pi$ begrenzt wird. Man denke sich diesen Horizontalstreifen durch Linien $Y = k\frac{2\pi}{n}$, wo k eine ganze Zahl zwischen 0 und n ist, in congruente Theile getheilt. Dies entspricht der Eintheilung der z-Ebene durch Linien, die mit der Neigung $\varphi = k\frac{2\pi}{n}$ vom Nullpunkte ausgehen, in gleiche Sectoren. Der Nullpunkt der z-Ebene entspricht dem Bereiche $-\infty$ des Streifens, der unendliche Bereich der z-Ebene dem Bereiche $+\infty$ des Streifens.

Da ferner $X = \lg r$ ist, so entspricht der Eintheilung des Streifens durch Gerade $X = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a \ldots\ldots$ eine Eintheilung der z-Ebene durch Kreise $\lg r = 0, \pm a, \pm 2a, \ldots.$ oder $r = e^0, e^{\pm a}, e^{\pm 2a}, \ldots.$ in concentrische Ringe. Während die Theile des Streifens congruent sind, sind die Kreisringe ähnlich, denn es ist z. B. $e^a : e^{2a} = e^{2a} : e^{3a}$.

Der Eintheilung des Streifens in kleine Rechtecke durch horizontale und verticale Geraden entspricht also eine Eintheilung der z-Ebene durch ein Strahlenbüschel und concentrische Kreise um den Nullpunkt in kleine rechtwinklige Flächenräume, die unter sich ähnlich sind.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass bei Vervielfachung der Rechteckseintheilung, d. h. bei zunehmender Kleinheit der Rechtecke beider Ebenen die „Rechtecke" der z-Ebene mehr und mehr denen der Z-Ebene ähnlich werden.

Um dies zu beweisen, denke man sich in der Z-Ebene die Eintheilung geschehen durch die Linien $Y = 0, b, 2b, 3b \ldots.$ und $X = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots.$, so dass $a : b$ das Verhältniss der Rechtecksseiten der Z-Ebene ist. Für ein beliebiges „Rechteck" der z-Ebene ist dann die geradlinige Seite von der Länge $e^{na} - e^{(n-1)a}$, während eine der anderen Seiten ein Kreisbogen mit dem Radius $e^{(n-1)a}$, also von der Länge $e^{(n-1)a} \cdot b$ ist. Das Verhältniss der Seiten ist demnach $e^{na} - e^{(n-1)a} : e^{(n-1)a} \cdot b$ oder $e^a - 1 : b$. Nun ist aber

$$e^a - 1 = \left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots\right) - 1 = \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots,$$

also kann man, wenn a sehr klein ist, die höheren Potenzen vernachlässigen, so dass mit zunehmender Kleinheit das Verhältniss der Rechtecksseiten in der z-Ebene sich der Grenze $a : b$

nähert. *Die kleinen Rechtecke beider Ebenen sind also ähnlich, mit andern Worten: Durch die Function* $X + Y = \lg(x + yi)$ *wird die z-Ebene in den kleinsten Theilen ähnlich auf den genannten Horizontalstreifen der z-Ebene übertragen.*

Ist $a = b$, so entsteht die Eintheilung in kleine „*Quadrate*", wie sie in Fig. 8 für beide Ebenen dargestellt ist.

Wir kommen auf diese Beziehungen noch einmal vom allgemeineren Standpunkte aus zurück und bemerken nur noch, dass die Eckpunkte diagonal aufeinander folgender Rechtecke in der Z-Ebene auf Geraden, in der z-Ebene auf *logarithmischen Spiralen* liegen. Auch über die zahlreichen Beziehungen zwischen Symmetrie und Reciprocität kann erst später gesprochen werden.

Berücksichtigt man die durch den Zusatz $2k\pi i$ entstehenden Werthgruppen, so erhält man in der Z-Ebene unendlich viele aneinander liegende Streifen, deren jeder einer Schicht der z-Ebene entspricht. Letztere ist also eine Windungsfläche unendlicher Ordnung mit dem Nullpunkte als Windungspunkt. Bezüglich der Vergrösserungsverhältnisse ergiebt sich sofort, dass nur der Einheitskreis der z-Ebene seinen Massstab beibehält. Die Umgebung des Nullpunktes wird unendlichfach vergrössert, die des unendlichen Punktes unendlichfach verkleinert dargestellt.

Die umgekehrte Function des natürlichen Logarithmus ist die Exponentialfunction $z = e^Z$ oder

$$x + yi = e^{X + Yi} = e^X e^{Yi} = e^X (\cos Y + i \sin Y),$$

so dass

$$x = e^X \cos Y, \qquad y = e^X \sin Y$$

ist. Um also zu einem gegebenen Punkte $X + Yi$ den Punkt $x + yi = e^{X + Yi}$ zu finden, berechne man die soeben gefundenen Werthe von x und y angenähert, und trage sie in die z-Ebene ein. Das Verhalten beider Ebenen gegeneinander wird wiederum durch Figur 8 dargestellt. Diese Figur giebt übrigens die in der Einleitung angedeutete Beziehung zwischen der Ptolomäischen Polarkarte und der liegend gedachten Mercatorkarte.

Kann man zu einer gegebenen Zahl $x + yi$ den natürlichen Logarithmus construiren, so ist auch die geometrische Darstellung jedes anderen Logarithmus ermöglicht, da bekanntlich

$$\mathrm{Log}(x + yi) = m \,.\, \lg(x + yi)$$

ist, wo m den *Modul* des neuen Logarithmensystems bezeichnet.

Es ist also nur noch die geometrische Multiplication mit dem reellen oder complexen Factor m nöthig.

Auch die Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen ist hier leicht zu erledigen. Da man nämlich zu beliebigem $x + yi$ leicht $\lg(x + yi)$, also auch $(a + bi)\lg(x + yi)$ bilden kann, so ist man im Stande, mit Hülfe des über die Exponentialfunction Gesagten auch $e^{(a+bi)\lg(x+yi)}$, d. h. $(x + yi)^{a+bi}$ geometrisch mit beliebiger Annäherung darzustellen.

Wir brechen das Capitel über die geometrische Darstellung der elementaren Operationen hiermit ab und geben noch einige litterarische Nachweise.

§ 8. Litteratur.

„Die Rechnung mit Richtungszahlen oder die geometrische Behandlung imaginärer Grössen" ist der Titel eines ausführlichen Werkes (170 Seiten) von Dr. Friedrich Riecke, welches 1856 bei Metzler in Stuttgart erschienen, aber bereits vergriffen ist. Dasselbe giebt am Schluss auf Seite 161 bis 170 litterarische Nachweise mit ausführlicheren Inhaltsangaben. Daraus sei Folgendes zur Ergänzung der bereits gemachten Angaben zusammengestellt:

Heinrich Kühn, Professor zu Danzig: Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. 1750. (Novi commentarii Acad. Petrop. III, 1750 et 1751.) 54 Quartseiten.

M. Buée: Mémoire sur les quantités imaginaires 1805. (Philosophical Transactions for year 1806. London 1806.) 66 Quartseiten.

Gombertz: The principles and application of imaginary quantities. 11 Vol. London, 1817.

C. V. Mourey: La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. Paris, 1828. (Pag. XII. 144.)

John Warren: A Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. Cambridge, 1828.

Franz Moth, Professor in Linz: Ueber die Anwendbarkeit der imaginären Zahlformen in der Geometrie. 1840. (Abhandl. der Kgl. Baierschen Akademie der Wissensch. München, Bd. 3, Abth. 1.) 64 Quartseiten.

H. M. C. zur Nedden: Dissertatio inauguralis de applicatione numeri complexi ad demonstranda nonnulla geometriae theoremata. Goettingae, 1840.

Max. Marie: Discours sur la nature des grandeurs négatives et imaginaires. Paris, 1843. Nach Riecke nicht geeignet, „Licht zu verbreiten".

L. Ballauf: Beiträge zur systematischen Darstellung der allgemeinen Arithmetik. 1844. (Grunert's Archiv, Bd. 5, Seite 259, Bd. 6, Seite 409.)

Herrmann Scheffler: Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen. Braunschweig, 1845. — Vergleiche auch Grunert's Archiv, Bd. 15, Seite 375, 390.

Derselbe: Der Situationscalcul. Versuch einer arithmetischen Darstellung der niederen und höheren Geometrie auf Grund einer abstracten Auffassung der räumlichen Grössen, Formen und Bewegungen. Braunschweig, 1851.

Theodor Wittstein: Einige kleinere Aufsätze in Grunert's Archiv, Bd. 6 uud 7. 1845.

Wilhelm Matzka: Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen. Prag, 1850. (Abdruck aus den Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.)

Dr. Grebel: Die complexen Werthe der Fundamentalfunctionen in geometrischer Darstellung. Gymnasialprogramm. Zeitz, 1851.

Dr. H. Burhenne: Zur Theorie der imaginären Grössen. 1853. (Grunert's Archiv, Bd. 22, Seite 43.) (Aeussert gewisse Bedenken, versucht dagegen einen nicht begründeten Zusammenhang mit Fresnel's Undulationstheorie darzustellen.)

G. H. Bubendey: Ueber die räumliche Darstellung der imaginären Grössen in der Analysis. Hamburg, 1854.

Ulherr, Professor: Einige Bemerkungen über imaginäre Ausdrücke. (Crelle's Journal, Bd. 31.)

Drobisch: Ueber die geometrische Construction der imaginären Grössen. Wien, 1848.

Arenstein, Professor: Was sind die imaginären Grössen, und was ist ihr analytischer und geometrischer Sinn? Wien, 1848. (In den naturwissenschaftlichen Abhandlungen von Haidinger.)

v. Lamezan: Beiträge zur Philosophie der Mathematik mit besonderer Rücksicht auf das sogenannte Imaginäre. Würzburg, 1851.

Vallès: Etudes philosophiques sur la science du calcul. Paris, 1841.

Faure: Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités dites imaginaires. Paris, 1845.

Bellavitis: Saggio sul algebra degli imaginarii. Venezia, 1852. —

Die zahlreichen Lehrbücher der niederen und höheren Analysis, die den Gegenstand dieses Capitels gleichfalls berücksichtigen, sind hier nicht mit genannt.

Das Werk des Dr. Riecke ist im 1. Jahrgang der Zeitschrift für Mathem. und Physik (Litteraturzeitung, Seite 77—79) von Cantor eingehend besprochen worden. Derselbe führt noch an:

Français: Nouveaux principes de la géometrie de position, in Gergonne's Annales des mathématiques, Tome IV, page 61 (année 1813).

Auch wird noch bemerkt, dass Cauchy in einem Aufsatze in den Comptes rendus de l'académie des sciences (Tome 29, 1849, page 250): Sur les quantités géometriques, bezüglich eines Theils der Resultate dem Mr. Henry-Dominique Truel die Priorität zuspricht, der sie ums Jahr 1810 dem Mr. Augustin Normand, Schiffsconstructeur zu Havre, mitgetheilt habe.

Ueber die geometrische Darstellung der Werthe einer Potenz mit complexer Basis und complexem Exponenten vergleiche man den entsprechenden Aufsatz von Durège im 5. Bande der Zeitschrift für Mathem. und Physik, Seite 345—361. —

Ausführlicheres über die Abbildung mittels des natürlichen Logarithmus gab der Verfasser im 16. Bande der Zeitschrift für Mathem. und Physik, Seite 269—289, über die Abbildung mittels der Quadratwurzel im 21. Bande derselben Zeitschrift, Seite 325—363; über die Abbildung mittels der Function $Z = \sqrt[n]{z}$ im Crelle-schen Journal, Bd. 83, Seite 38—43, ausserdem noch in der Zeitschrift für Mathem. und Physik, Bd. 26, Seite 231—256. Die geometrischen und sonstigen Consequenzen der behandelten Methoden kommen später zur Sprache.

Der Zusammenhang des Siebeck'schen Punktcalcüls mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre wird in der entsprechenden Abhandlung von V. Schlegel in der Zeitschrift für Mathem. und Physik, Bd. XXIV, Seite 83 (Jahrgang 1879) erörtert.

Man vergleiche auch S. Günther: Operative Arithmetik der Gittersysteme, Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht, XIII, Seite 3 f. u. 93 f. Auch dort findet man zahlreiche Litteraturnachweise.

Zweites Capitel.

Die Verwandtschaften der Congruenz und Aehnlichkeit.

§ 9. Die Abbildung $Z = z + c$.

Im vorigen Capitel handelte es sich, von einigen Andeutungen abgesehen, nur um die Construction einzelner Punkte. Von jetzt ab werden sämmtliche Punkte zweier Ebenen durch eine Function in gegenseitige Beziehung gesetzt. Der einfachste Fall ist der der Function $Z = z + c$, wobei Z und z variabele complexe Grössen, c eine complexe Constante bedeutet. Da jedem Punkte z_1 der z-Ebene ein Punkt $Z_1 = z_1 + c$ der Z-Ebene entspricht, der nach der Additionsregel durch Verschiebung um die complexe Strecke c gefunden wird, *so entspricht jedem geometrischen Gebilde der z-Ebene ein congruentes der Z-Ebene, nur ist letzteres der Parallelverschiebung um die complexe Strecke c unterworfen.*

Später wird sich zeigen, dass die Congruez eine Folge des Umstandes ist, dass der Differentialquotient der Function $z + c$ den Werth 1 hat.

§ 10. Die Abbildungen $Z = z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und $Z = z(\cos\alpha + i\sin\alpha) + c$.

Bei der Abbildung $Z = z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ entspricht nach § 3 jedem Punkte z_1 der z-Ebene ein Punkt $Z_1 = z_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, der durch Drehung seines Radius um den Winkel α gefunden wird, während der Radius selbst ungeändert bleibt. Bei der Abbildung $Z = z(\cos\alpha + i\sin\alpha) + c$ tritt zu dieser Drehung um den Nullpunkt noch eine Parallelverschiebung um die complexe Strecke c. *Bei beiden Abbildungen bleibt wiederum die Congruenz der geometrischen Gebilde erhalten*, eine Folge davon, dass der Differentialquotient den Werth $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, also den absoluten Betrag 1 hat. —

Bei dem speciellen Falle $Z = -z$ wird, da $-1 = (\cos 180^0 + i\sin 180^0)$ ist, eine Drehung um 180^0 herbeigeführt. Dasselbe Resultat erhält man durch Umklappen der z-Ebene erst um die reelle, dann um die imaginäre Axe. — Die in beiden Abschnitten behandelten Abbildungen geben *Verwandtschaften der Congruenz.*

§. 11. Die Abbildungen $Z = cz$ und $Z = cz + c_1$.

Ist c zunächst reell, z. B. $= \varrho$, so geht nach § 3 durch die Abbildung $Z = cz$ jeder Punkt z_1 der z-Ebene über in einen Punkt

$Z_1 = \varrho z_1$ der Z-Ebene, dessen Abweichung dieselbe ist, während der Radius im Verhältniss $1 : \varrho$ vergrössert ist. Die geometrischen Gebilde der z-Ebene gehen also über in *ähnliche und ähnlich liegende Gebilde der Z-Ebene, die in Bezug auf den Nullpunkt perspectivische Lage gegen die ursprünglichen haben.*

Ist hingegen $c = \varrho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, so wird der Radius jedes Punktes im Verhältniss $1 : \varrho$ vergrössert und ausserdem um den Winkel α gedreht. *Die Aehnlichkeit der geometrischen Gebilde bleibt erhalten, jedoch erscheint die ganze Z-Ebene gegen die z-Ebene um den Winkel α gedreht.*

Die Function $Z = cz + c_1$ unterscheidet sich von der vorigen nur insofern, als zur Vergrösserung und Drehung noch eine Parallelverschiebung um die Strecke c_1 tritt.

Alle Abbildungen dieses Paragraphen geben also *Verwandtschaften der Aehnlichkeit.*

Bemerkenswerth ist Folgendes: Der Differentialquotient von $Z = cz + c_1 = \varrho (\cos \alpha + i \sin \alpha) . z + c_1$ ist $c = \varrho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$. *Sein absoluter Betrag ϱ entspricht also dem Verhältniss der Vergrösserung, während die Abweichung α die Verdrehung der entsprechenden Gebilde gegen einander angiebt.*

Aufgabe: Die z-Ebene soll ähnlich und so auf die Z-Ebene übertragen werden, dass zwei gegebenen Punkten z_1 und z_2 zwei gegebene Punkte Z_1 und Z_2 entsprechen. Welches ist die abbildende Function?

Man bestimme c und c_1 aus den Gleichungen $Z_1 = cz_1 + c_1$ und $Z_2 = cz_2 + c_1$. Es ergiebt sich $c = \frac{Z_1 - Z_2}{z_1 - z_2}$, $c_1 = \frac{Z_2 z_1 - Z_1 z_2}{z_1 - z_2}$. Dies ist einzusetzen in die abbildende Function $Z = cz + c_1$.

Drittes Capitel.

Die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ und die Inversion oder Transformation mittels reciproker Radii vectores.

§ 12. Allgemeiner Charakter dieser Abbildung.

Ehe allgemeinere Sätze über die conforme Abbildung ausgesprochen werden, werde das Verständniss derselben vorbereitet durch ausführlichere Behandlung einer leichteren Transformation, bei der es sich nicht mehr um volle Aehnlichkeit handelt. Es ist

die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$, die, abgesehen von einem Umklappen um die reelle Axe, übereinstimmt mit der *Inversion* oder *Abbildung mittels reciproker Radii vectores*, und von der man leicht zu der von Möbius eingeführten *Kreisverwandtschaft* übergehen kann. Dieselbe ist von hervorragender Wichtigkeit für zahlreiche Probleme der reinen und angewandten Mathematik. Um in die verschiedenen Methoden einzuführen, deren man sich bei Abbildungsaufgaben bedienen kann, werden einige Sätze auf mehrfache Art abgeleitet.

Bei der vorliegenden Abbildung ist zunächst

1) $$X + Yi = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

oder

2) $$R(\cos\Theta + i\sin\Theta) = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = \frac{1}{r}\Big[\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\Big],$$

wozu man § 3 vergleiche. Jedem Punkte der z-Ebene, dessen Bahn durch r und ϑ bestimmt wird, entspricht ein Punkt der Z-Ebene mit dem Radius $R = \frac{1}{r}$ und dem Richtungswinkel $\Theta = -\vartheta$. Fände nicht dieser letztere Vorzeichenwechsel statt, so wäre die Abbildung identisch mit der Inversion. Zu letzterer tritt eben noch ein Umlegen um die reelle Axe.

Statt R gemäss der Proportion $r : 1 = 1 : R$ zu construiren, kann man auch folgenden Weg einschlagen: Man ziehe von dem gegebenen Punkte aus, wenn er ausserhalb des Einheitskreises liegt, an den Einheitskreis Tangenten und einen Durchmesser und bestimme auf letzterem den Schnittpunkt mit der Berührungssehne beider Tangenten. Zu diesem Punkte muss noch das Spiegelbild gegen die reelle Axe gebildet werden. So sind z. B. in Fig. 9, A und A_1 reciproke Punkte in unserem Sinne. Der Beweis beruht darauf, dass nach Pythagoras $\overline{OE}^2 = \overline{OB}.\overline{OA}$, also, da $\overline{OE} = 1$ gesetzt wurde, $\overline{OB} = \frac{1}{\overline{OA}}$ ist.

Auch sei daran erinnert, dass A, C, B und D harmonische Punkte sind. Auf die hieraus folgenden Constructionen, die bekanntlich nur das Lineal erfordern (vergl. den Satz vom vollständigen Vierseit) und auf den Zusammenhang mit der Theorie von Pol und Polare sei nur kurz hingedeutet. Liegt der gegebene Punkt innerhalb des Kreises, so ist die Construction ebenso leicht.

Jedem Punkte des unendlichen Bereichs der z-Ebene entspricht der Nullpunkt der Z-Ebene, ebenso jedem unendlich fernen Punkte der Z-Ebene der Nullpunkt der z-Ebene. Die Ausdrucksweise vereinfacht sich aber, wenn man annimmt, es gebe nur *einen* unend-

lich entfernten Punkt in jeder Ebene, eine Anschauung, die sich vielfach mit Nutzen verwerthen lässt*). Dann entspricht jedem Punkte der einen Ebene *ein* und nur *ein* Punkt der andern. Die Verwandtschaft ist also eine *eindeutige*.

Da übrigens aus $Z = \frac{1}{z}$ folgt: $z = \frac{1}{Z}$, so gilt alles von der z-Ebene Gesagte auch von der Z-Ebene, die Verwandtschaft gehört demnach zu denen, welche von Siebeck als *involutorische* bezeichnet werden, die also ohne Aenderung umkehrbar sind.

Dem 1ten, 2ten, 3ten, 4ten Quadranten der z-Ebene entspricht bezüglich der 4te, 3te, 2te, 1te der Z-Ebene. *Jeder Kreis mit Radius c um den Nullpunkt der einen Ebene geht über in einen Kreis mit Radius* $\frac{1}{c}$ *um den Nullpunkt der andern, der jedoch in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird. Dem geradlinigen Wege von* 0 *nach* ∞ *mit der Neigung* ϑ *in der einen Ebene entspricht der geradlinige Weg von* ∞ *nach* 0 *in der andern, dessen Neigung, von* 0 *aus gerechnet, gleich* $-\vartheta$, *von* ∞ *aus gerechnet, gleich* $180^0 - \vartheta$ *ist.* Beispielshalber entsprechen sich die positiven Theile der reellen Axen, ebenso die negativen. Auch die beiden Einheitskreise entsprechen einander.

§ 13. Analytische Beziehungen zwischen beiden Ebenen.

Analytisch lässt sich das gegenseitige Entsprechen der concentrischen Kreise um den Nullpunkt beider Ebenen und der Strahlenbüschel durch denselben folgendermassen ableiten.

Aus $$X + Yi = \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

folgt $$X - Yi = \frac{x+yi}{x^2+y^2} = \frac{x+yi}{(x+yi)\,(x-yi)} = \frac{1}{x-yi}.$$

Multiplication auf beiden Seiten giebt aber

$$X^2 + Y^2 = \frac{1}{x^2+y^2},$$ woraus wie oben folgt 3) $R = \frac{1}{r}$.

Durch Division hingegen erhält man

$$\frac{X+Yi}{X-Yi} = \frac{x-yi}{x+yi},$$

wofür man schreiben kann $\frac{1}{2i} \lg \frac{X+Yi}{X-Yi} = -\frac{1}{2i} \lg \frac{x+yi}{x-yi}$.

Nach § 7 war aber

*) Nichts hindert uns, das der Betrachtung unterworfene endliche Stück der Ebene als Theil einer unendlich grossen Kugel zu betrachten, die also im Unendlichen geschlossen ist.

$$\lg(x+yi) = \lg\sqrt{x^2+y^2} + i \arctan\frac{y}{x},$$

also auch

$$\lg(x-yi) = \lg\sqrt{x^2+y^2} - i \arctan\frac{y}{x},$$

so dass durch Subtraction folgt $\lg\frac{x+yi}{x-yi} = 2i \arctan\frac{y}{x}$.

Hier ist von dem periodischen Zusatze $\pm k\pi$ abgesehen. Anwendung dieser Formel auf die vorher entwickelte Gleichung giebt also

$$\arctan\frac{Y}{X} = -\arctan\frac{y}{x}.$$

Arctan $\frac{Y}{X}$ ist aber der Richtungswinkel einer Geraden durch den Nullpunkt, so dass man auch schreiben kann

4) $$\Theta = -\vartheta.$$

Dieser für unser Beispiel allerdings etwas complicirte Entwicklungsgang wird noch häufiger Anwendung finden.

In beiden Ebenen entsprechen sich folgende Curvengruppen:

5) $f(R, \Theta) = 0$ und $f\left(\frac{1}{r}, (-\vartheta)\right) = 0,$

6) $f(X, Y) = 0$ und $f\left(\frac{x}{x^2+y}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = 0,$

7) $f\left[(X+Yi), (X-Yi)\right] = 0$ und $f\left(\frac{1}{x+yi}, \frac{1}{x-yi}\right) = 0.$

Rechts und links kann man die grossen und kleinen Buchstaben mit einander vertauschen. Besonders die letzte Gleichung gestattet häufig elegante Anwendungen.

§. 14. In welche Curven verwandelt sich der Kreis $P = c$ um den Punkt $(a+bi)$ der Z-Ebene?

1. Methode. Die Gleichung des genannten Kreises lautet

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = c^2$$

oder

$$[X+Yi-(a+bi)] \cdot [X-Yi-(a-bi)] = c^2.$$

Nach der letzten Gleichung des vorigen Abschnitts geht sie durch unsere Abbildung über in

$$\left[\frac{1}{x+yi} - (a+bi)\right] \cdot \left[\frac{1}{x-yi} - (a-bi)\right] = c^2.$$

Hier mache man jede Klammer gleichnamig und sondere $\frac{a+bi}{x+yi}$ resp.

$\frac{a-bi}{x-yi}$ ab. Setzt man dann noch $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$ statt $\frac{1}{a+bi}$ und $\frac{a+bi}{a^2+b^2}$ statt $\frac{1}{a-bi}$, so erhält man

$$\frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}\left[x-\frac{a}{a^2+b^2}+i\left(y+\frac{b}{a^2+b^2}\right)\right]\cdot\left[x-\frac{a}{a^2+b^2}-i\left(y+\frac{b}{a^2+b^2}\right)\right]=c^2,$$

oder endlich

$$\frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}\left[\left(x-\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2\right]=c^2.$$

Hier ist die eckige Klammer das Quadrat eines Radius vector r_1, der von dem Puncte $\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{1}{a+bi}$ nach dem veränderlichen Punkte $x+yi$ gezogen ist. Setzt man noch $x^2+y^2=r^2$, so findet sich als Gleichung der Curve, die dem Kreise $P=c$ um $a+bi$ entspricht nach Ausziehung der Wurzel

$$8) \qquad \frac{r_1}{r}\sqrt{a^2+b^2}=c.$$

Bekanntlich ist aber $\frac{r_1}{r}=K$ die Gleichung eines Kreises, der Curve des constanten Quotienten zweier Radii vectores. *Jedem Kreise der Z-Ebene entspricht also ein Kreis der z-Ebene, und umgekehrt findet dasselbe statt.*

Bemerkenswerth ist, dass die Ausgangspunkte der Radii vectores r und r_1 die Reciproken der Punkte ∞ und $a+bi$ sind.

2. Methode: Man setze in die Gleichung $P=c$ oder

$$(X-a)^2+(Y-b)^2=c^2$$

oder

$$R^2-2R(a\cos\Theta+b\sin\Theta)=c^2-(a^2+b^2)=-t^2$$

(wo t^2 die Potenz des Nullpunktes in Bezug auf den gegebenen Kreis, also entweder die Tangente vom Nullpunkte aus, oder die kürzeste Sehne durch denselben bedeutet) für X und Y nach § 13 die Werthe $\frac{x}{x^2+y^2}$ und $\frac{-y}{x^2+y^2}$, resp. für R und Θ die Werthe $\frac{1}{r}$ und $-\vartheta$ ein. Nach leichten Umformungen erhält man z. B. als Gleichung der gesuchten Curve

$$x^2+y^2-\frac{2ax}{t^2}+\frac{2by}{t^2}=-\frac{1}{t^2},$$

oder $$\left(x-\frac{a}{t^2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{t^2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-t^2}{t^4}=\frac{c^2}{t^4},$$

also die Gleichung eines Kreises mit Radius $\frac{c}{t^2}=\frac{c}{a^2+b^2-c^2}$ um den Punkt $\frac{a-bi}{t^2}=\frac{a-bi}{a^2+b^2-c^2}$. *Wichtig ist, dass an Stelle der Potenz t^2 die reciproke Potenz $\frac{1}{t^2}$ getreten ist.*

3. Methode. In Fig. 10 sei A der gegebene Kreis, $OA = e$, $OP = e_1$, $OA_1 = \frac{1}{e}$, $OP_1 = \frac{1}{e_1}$, also, da $\frac{1}{e} : \frac{1}{e_1} = e_1 : e$ ist, Dreieck $OAP \sim OA_1P_1$, folglich auch $OP_1 : A_1P_1 = OA : AP$. Da endlich $\frac{OA}{AP} = \frac{e}{c}$ constant ist, wenn sich P auf dem gegebenen Kreise bewegt, so ist auch $\frac{OP_1}{A_1P_1} = \frac{e}{c}$ constant, d. h. der entsprechende Punkt P_1 wandert auch auf einem Kreise. Setzt man $OP_1 = r$, $A_1P_1 = r_1$, so ist also $\frac{r_1}{r}\sqrt{a^2 + b^2} = c$ die Gleichung des Kreises, was obigem Resultate entspricht. Es entsprechen sich also nicht die Mittelpunkte beider Kreise, sondern dem Mittelpunkte A des einen entspricht der durch die Polare des Nullpunktes bestimmte Punkt A_1, so dass *die harmonischen Punkte $DAE\infty$ in die harmonischen Punkte $D_1A_1E_1O$ übergehen*, ein Satz, der sich verallgemeinern lässt. In Fig. 10 ist O äusserer Aehnlichkeitspunkt beider Kreise, was stets stattfindet, wenn der gegebene Kreis den Nullpunkt nicht umschliesst. Aehnlich ist die Figur, wenn er den Nullpunkt umschliesst, wobei jedoch der Nullpunkt zum inneren Aehnlichkeitspunkte beider Kreise wird. Nimmt man schliesslich, um völlige Uebereinstimmung zu erhalten, das Umklappen um die reelle Axe vor, so überzeugt man sich leicht, dass jeder den Nullpunkt ausschliessende Kreis durch die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ in einen eben solchen übergeht, der in gleichem Sinne durchlaufen wird, und zwar entsprechen sich Inneres und Inneres, Aeusseres und Aeusseres beider Kreise.

Umschliesst hingegen der erste Kreis den Nullpunkt, so umschliesst ihn auch der zweite, jedoch wird letzterer im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, und das Innere des einen entspricht dem Aeusseren des andern.

Man entnehme daraus folgende, für das Spätere wichtige Bemerkung: Umwandert man den ersten Kreis so, dass man das abzubildende Gebiet zur Linken hat, so hat man bei der entsprechenden Wanderung auf dem zweiten Kreise das betreffende Gebiet gleichfalls zur Linken. Die Bewegung geschieht überhaupt bei allen einander entsprechenden Begrenzungen so, *dass man sich auf dem gleichnamigen „Ufer" der sich entsprechenden Flächen befindet.*

Dem Kreise durch die drei Punkte $a_1 + b_1i$, $a_2 + b_2i$, $a_3 + b_3i$ entspricht der Kreis durch die drei Punkte $\frac{1}{a_1 + b_1i}$, $\frac{1}{a_2 + b_2i}$, $\frac{1}{a_3 + b_3i}$. Ist der eine der drei ersten Punkte der unendlich ferne, d. h. ist der erste Kreis eine gerade Linie, so muss der letztere durch den

Nullpunkt gehen. Ist die Neigung der Geraden gegen die positive reelle Axe α, so würde durch Inversion ein Kreis entstehen, der im Nullpunkte die reelle Axe unter dem Winkel α schneidet. Durch unsere Abbildung entsteht also ein unter $-\alpha$ schneidender Kreis. Daraus lässt sich sofort die Isogonalität der Verwandtschaft folgern, die in § 15 wirklich abgeleitet wird.

§ 15. Was entspricht der Geraden $\Theta = \gamma$ durch den Punkt $a + bi$? — Isogonalität.

Die Gleichung dieser Geraden ist

$$\frac{Y-b}{X-a} = \tan\gamma, \quad \text{oder arctan } \frac{Y-b}{X-a} = \gamma,$$

wofür man nach der oben entwickelten Formel schreiben kann

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{(X-a)+i(Y-b)}{(X-a)-i(Y-b)} = \frac{1}{2i}\lg\frac{(X+Yi)-(a+bi)}{(X-Yi)-(a-bi)} = \gamma.$$

Durch unsere Abbildung geht dies über in

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\frac{1}{x+yi}-(a+bi)}{\frac{1}{x-yi}-(a-bi)} = \gamma,$$

oder

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{a+bi}{a-bi}\cdot\frac{x-yi}{x+yi}\cdot\frac{\frac{1}{a+bi}-(x+yi)}{\frac{1}{a-bi}-(x-yi)} = \gamma.$$

Hier ist

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}, \qquad \frac{1}{a-bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{bi}{a^2+b^2}$$

zu setzen, so dass man erhält

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-\left(\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}\right)}{x-yi-\left(\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{b}{a^2+b^2}\right)} - \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi}{x-yi} + \frac{1}{2i}\lg\frac{a+bi}{a-bi} = \gamma,$$

oder, wenn man mittels obiger Formel wieder zu dem arcus tangens übergeht,

$$\text{arctan}\,\frac{y+\frac{b}{a^2+b^2}}{x-\frac{a}{a^2+b^2}} - \text{arctan}\,\frac{y}{x} + \text{arctan}\,\frac{b}{a} = \gamma.$$

Links stehen die Richtungswinkel der Radii vectores, die der Reihe nach von den Punkten $\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+bi}$ und Null nach $x+yi$ und von Null nach $a+bi$ gezogen sind, so dass man schreiben kann

9) $$\vartheta_1 - \vartheta + \alpha = \gamma$$

oder $\vartheta_1 - \vartheta = \gamma - \alpha$. Es handelt sich also um eine *Curve constanter Differenz der Neigungswinkel der Radii vectores*, d. h. constanten Peripheriewinkels, also um einen *Kreis durch Null und* $\frac{1}{a+bi}$ *mit dem Peripheriewinkel* $\gamma - \alpha$ über der durch diese Punkte bestimmten Sehne. Daraus, wie auch aus der Schlussbemerkung des vorigen Abschnittes folgt, dass der Kreis die reelle Axe im Nullpunkte unter dem Winkel γ schneidet und denselben Winkel über ihr zum Peripheriewinkel hat. Vgl. Fig. 11.

Aus diesen Betrachtungen lässt sich Folgendes schliessen. Der Winkel BAC zwischen zwei Geraden, von denen die eine durch den Nullpunkt geht, wird bei der Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ ein Winkel von derselben Grösse zwischen dem entsprechenden Kreise und der entsprechenden Geraden, d. h. zwischen letzterer und der Tangente des Kreises. Dasselbe gilt von der Geraden AO und jeder andern Geraden durch A. Folglich ist der Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden durch A gleich dem Winkel, unter dem sich die beiden entsprechenden Kreise in Null und A_1 schneiden. Schneiden sich also zwei beliebige Kreise unter irgend einem Winkel k, so schneiden sich die entsprechenden Kreise gleichfalls unter dem Winkel k, denn an Stelle der Kreise kann man die Tangenten im Schnittpunkte setzen. Also: *Je zwei Kreise (oder Gerade) der z-Ebene schneiden sich unter demselben Winkel, wie die entsprechenden der Z-Ebene.*

Die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ giebt demnach eine *isogonale Verwandtschaft.* Kleinen Dreiecken der einen Ebene entsprechen ähnliche und ähnlich liegende kleine Dreiecke der andern, d. h. *die Abbildung ist conform.* Nur die Umgebung des Nullpunktes ist hiervon auszuschliessen, denn kleine Dreiecke, die diesen umgeben, werden in unendlich grosse Flächenstücke verwandelt, zu denen der unendliche Punkt gehört.

Man hätte, um zu diesem Resultate zu gelangen, einen kürzeren Weg einschlagen können. Der gewählte hat aber den Vortheil, direct auf folgende analytische Beziehung zwischen beiden Ebenen zu führen: *Da dem Kreise* $P = c$ *um den Punkt* $a + bi$ *der Z-Ebene der Kreis* $\frac{r_1}{r}\sqrt{a^2 + b^2} = c$, *der Geraden* $\Theta = \gamma$ *durch diesen Punkt der Kreis* $\vartheta_1 - \vartheta + \alpha = \gamma$ *entspricht, wo* r_1 *und* r *Radii vectores sind, die von* $\frac{1}{a+bi}$ *und* 0 *ausgehen, während* ϑ_1 *und* ϑ *ihre Nei-*

gungswinkel sind und $\alpha = \arctan \frac{b}{a}$ *ist, so entsprechen sich in beiden Ebenen die Curven*

$$10)\quad f(P, \Theta) = 0 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{r_1}{r}\sqrt{a^2+b^2},\ (\vartheta_1 - \vartheta + \alpha)\right) = 0.$$

§ 16. Die Bicircularcoordinaten und ihr Zusammenhang mit den Polarcoordinaten.

Nach vorigem Abschnitt geht das Strahlenbüschel durch einen Punkt $a + bi$ (d. h. das Kreisbüschel durch die Punkte $a + bi$ und ∞) und die orthogonale concentrische Kreisschaar durch die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ in eine andere Doppelschaar von Kreisen über, nämlich in das *Kreisbüschel durch die Punkte* $\frac{1}{a+bi}$ *und* 0 *und in die orthogonale Kreisschaar*. Dass die beiden neuen Kreisgruppen sich rechtwinklig durchsetzen, folgt nämlich sofort aus der Isogonalität der Verwandtschaft; auch erkennt man leicht, dass jede Schaar für sich eine solche gemeinschaftlicher Potenzlinie ist. Ueber diese Kreisschaaren vergleiche man die Lehrbücher der synthetischen Geometrie und die geometrischen Betrachtungen von Steiner im 1. Bande des Crelle'schen Journals.

Ferner folgt, dass jedem Kreisbüschel durch zwei Punkte $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ der z-Ebene nebst orthogonaler Kreisschaar ein Kreisbüschel der Z-Ebene durch die Punkte $\frac{1}{a+bi}$ und $\frac{1}{a_1+b_1 i}$ nebst orthogonaler Kreisschaar entspricht. Welche Individua aber in einander übergehen, erkennt man aus der gegebenen analytischen Beziehung. Dem Kreisbüschel

$$\Phi - X = \gamma$$

durch die Punkte $a + bi$ ud $a_1 + b_1 i$ der Z-Ebene z. B. entspricht nämlich nach Obigem das Büschel

$$(\varphi - \vartheta + \alpha) - (\chi - \vartheta + \alpha_1) = \gamma,$$

oder, da die ϑ sich heben, das Büschel

$$(\varphi - \chi) + (\alpha - \alpha_1) = \gamma$$

oder $\varphi - \chi = \gamma - (\alpha - \alpha_1)$ durch die Punkte $\frac{1}{a+bi}$ und $\frac{1}{a_1+b_1 i}$ der z-Ebene.

Ebenso geht die Kreisschaar $\frac{P}{Q} = c$, welche zu dem Büschel orthogonal ist, über in die Kreisschaar

$$\frac{\frac{p}{r}\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{q}{r}\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}} = c \quad \text{oder} \quad \frac{p}{q}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a_1{}^2+b_1{}^2}} = c.$$

Betrachtet man also die Variabelen $\frac{P}{Q}$ und $\Phi - X$ als Coordinaten, so dass jeder Punkt der Ebene durch die beiden sich in ihm schneidenden Kreise fixirt wird — ein Coordinatensystem, von dem das der Polarcoordinaten ein specieller Fall ist, und welches man bequem als das der *Bicircular-Coordinaten* bezeichnet — so hat man zwischen den beiden Ebenen noch folgende Coordinaten-Relation: *Es entsprechen sich die Curven*

$$11) \qquad f\left[\frac{P}{Q}, (\Phi - X)\right] = 0 \quad \text{und}$$

$$f\left[\left(\frac{p}{q}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a_1{}^2+b_1{}^2}}\right), \left(\varphi - \chi + (\alpha - \alpha_1)\right)\right] = 0,$$

wobei die Radii vectores p und q, deren Neigungen durch φ und χ dargestellt werden, von den Punkten $\frac{1}{a+bi}$ *und* $\frac{1}{a_1+b_1 i}$ *ausgehen, wenn die Radii vectores P und Q, deren Neigungen Φ und X sind, von* $a + bi$ *und* $a_1 + b_1 i$ *ausgehen.*

§ 17. Isothermische Eintheilung der Ebene mittels der Bicircularcoordinaten.

Als *isothermisches Coordinatensystem* bezeichnen wir aus später zu erörternden Gründen ein solches, durch welches die Ebene in ein System rechtwinkliger Flächenstücke eingetheilt werden kann, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. Ein solches System ist das der concentrischen Kreise und des orthogonalen Strahlenbüschels, bei dem sogar vollkommene Aehnlichkeit der kleinen „Rechtecke" erzielt werden kann. Aus dem isogonalen Charakter der Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ geht hervor, dass die Transformation einer solchen Rechteckseintheilung auf eine Doppelschaar von Kreisen führt, die sich nicht nur rechtwinklig schneiden und demnach „rechtwinklige" Flächenräume geben, sondern bei denen diese kleinen „Rechtecke" mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. Dies giebt uns also ein instructives Beispiel conformer Abbildung, welches, wie schon früher erwähnt, von besonderer Bedeutung für die Kartographie ist.

In § 7 war nun gezeigt, dass man die „ähnliche Rechtecksseintheilung" mittels des Strahlenbüschels durch einen Punkt $a + bi$ und der concentrischen Kreisschaar erreicht, wenn man die Radien

in geometrischer, ihre Neigungen in arithmetischer Reihe aufeinander folgen lässt, z. B. mit Hülfe der Reihen

$$\ldots\ldots,\ e^{-3\alpha},\ e^{-2\alpha},\ e^{-\alpha},\ e^{0},\ e^{\alpha},\ e^{2\alpha},\ e^{3\alpha},\ldots$$
$$\ldots,\ -3\gamma,\ -2\gamma,\ -\gamma,\ 0,\ \gamma,\ 2\gamma,\ 3\gamma,\ldots;$$

folglich erhält man die isothermische Eintheilung mittels des entsprechenden Kreisbüschels durch 0 und $\frac{1}{a+bi}$, nebst orthogonaler Kreisschaar, indem man den Ausdrücken

$$\frac{r_1}{r}\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad (\vartheta_1 - \vartheta + \alpha_1)$$

Werthe giebt, die diesen Reihen folgen. Dies gilt dann von jeder orthogonalen Doppelschaar von Kreisen, so dass man folgenden Satz hat:

Das Kreisbüschel $\varphi - \chi = \gamma$ durch zwei Punkte $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ und die orthogonale Kreisschaar $\frac{p}{q} = e^{\alpha}$ oder $lg\ \frac{p}{q} = \alpha$ theilen die Ebene in ein System von der Aehnlichkeit zustrebenden Rechtecken ein, sobald α und γ die Werthe von Gliedern arithmetischer Reihen annehmen.

Die Werthe α und γ heissen *die isothermischen Parameter dieses Curvensystems.*

Ist $\alpha = \gamma$, so erhält man nach § 7 die Eintheilung in kleine „Quadrate". Diese Eintheilung ist in Fig. 12 auf Tafel III durchgeführt und zwar mittels der Werthe

$$\ldots,\ \frac{-3\pi}{8},\ \frac{-2\pi}{8},\ \frac{-\pi}{8},\ 0,\ \frac{\pi}{8},\ \frac{2\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8},\ \ldots.$$

Die Figur zeigt zugleich, wie bei der Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ die Kreisschaar und das Strahlenbüschel um resp. durch den reellen Punkt $+1$ in ein Kreisbüschel durch 1 und 0 nebst orthogonaler Kreisschaar verwandelt werden. Die sich entsprechenden Quadrate sind kenntlich gemacht. U resp. O sind die Nullpunkte.

Man erkennt bei der neuen Rechteckstheilung sofort Folgendes: Von drei aufeinander folgenden Büschelkreisen sind der erste und dritte reciprok in Bezug auf den zweiten, denn die Inversion verwandelt einen Kreis, der den spiegelnden Kreis schneidet, in einen andern, der diesen unter demselben Winkel schneidet. Ferner ist jeder Kreis der Schaar gegen jeden beliebigen des Büschels sich selbst reciprok, weil es keinen andern giebt, der den spiegelnden in denselben beiden Punkten orthogonal schneidet. Wie also die ganze frühere Zeichnung symmetrisch gegen jeden Strahl war, *so ist die jetzige reciprok gegen jeden Kreis des Büschels. Die Abbildung*

$Z = \frac{1}{z}$ verwandelt also Punkte und Gebilde, die gegen eine beliebige Gerade symmetrisch liegen, in solche, die gegen den entsprechenden Kreis reciprok sind.

Ebenso giebt die Spiegelung gegen einen Kreis der Schaar jeden Büschelkreis durch diesen selbst wieder, jeden Orthogonalkreis also durch einen andern, und da die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen gewahrt bleibt, so folgt, dass auch je drei aufeinander folgende Kreise der Schaar sich so verhalten, dass der erste, gegen den zweiten gespiegelt, den dritten giebt. *Die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ verwandelt demnach Gebilde, die gegen einen beliebigen Kreis reciprok sind, in solche, die gegen den entsprechenden Kreis reciprok sind.*

Sind demnach zwei aufeinander folgende Kreise des Büschels sowohl, wie der Schaar, willkürlich gegeben, so lässt sich die ganze Rechteckseintheilung elementar vervollständigen, indem man die Inversion auf einen der Kreise und der Reihe nach auf alle entstandenen anwendet. *Man kann die Rechteckstheilung auch zu beliebiger Kleinheit der Flächentheilchen fortsetzen*, indem man z. B. Büschelkreise einschaltet, welche die Winkel zwischen aufeinander folgenden Büschelkreisen halbiren, und ferner Kreise der Schaar einzeichnet, die man durch folgende Ueberlegung bestimmt:

In Fig. 13 sei A ein Kreis des Büschels, 1 und 2 seien zwei aufeinander folgende der Schaar. Es soll derjenige (3) eingeschaltet werden, durch dessen Spiegelung Kreis 1 in den Kreis 2 übergeht. Sind also E und F die Schnittpunkte des Büschelkreises mit 1 und 2, so muss EF durch das Centrum des gesuchten Kreises gehen, der also mit Hülfe der von M aus zu legenden Tangente leicht zu construiren ist.

Beiläufig ist der Satz gewonnen, dass, wenn durch Spiegelung gegen einen Kreis ein zweiter in einen dritten verwandelt wird, die drei Kreise gemeinschaftliche Potenzlinie haben. Spiegelt man ferner die gesammte Figur gegen einen der Kreise, wobei sie sich nicht ändert, so ist das Centrum dieses Kreises Aehnlichkeitspunkt für je zwei sich entsprechende, äusserer für die diesen Punkt ausschliessenden, innerer gegen die ihn einschliessenden Kreise. Aus letzterer Bemerkung folgen zahlreiche Beziehungen. *Wichtig ist, dass die Symmetrieverhältnisse, die bei der wirklichen Rechteckseintheilung durch Parallelenschaaren auftreten, in Reciprocitätsverhältnisse übergegangen sind.*

§ 18. Einige geometrische Folgerungen.

Um zu zeigen, wie mit Hülfe der isogonalen Verwandtschaften aus bekannten Sätzen der Geometrie neue abgeleitet werden können, mögen einige elementare Betrachtungen eingeschaltet werden.

1. Alle Kreise, welche zwei sich schneidende Gerade berühren und von denen jeder den folgenden berührt, schneiden jede Gerade, die mit den beiden andern durch denselben Punkt geht, unter constantem Winkel, und ihre Berührungspunkte liegen auf der Winkelhalbirenden, gegen welche Symmetrie stattfindet.

Durch die Abbildung dieser Figur mittels der Function $Z = \frac{1}{z}$ folgt: Kreise innerhalb einer Kreissichel, welche diese und sich unter einander in obiger Weise berühren, werden von jedem Kreise des zur Sichel gehörigen Büschels unter constantem Winkel geschnitten und haben ihre Berührungspunkte auf dem die Sichelwinkel halbirenden Kreise, gegen welchen Reciprocität stattfindet.

Leicht folgt auch, dass die Kreisreihe, welche zu der dem Nebenwinkel entsprechenden Sichel gehört, als Berührungskreis den Orthogonalkreis des vorigen hat.

Die Mittelpunkte der Kreisreihe liegen nicht auf dem Berührungskreise, wohl aber die Polpunkte für die Büschelpunkte.

2. Die Reihe von Berührungskreisen im concentrischen Kreisringe hat folgende Eigenschaften: Die Berührungspunkte der aufeinander folgenden Kreise liegen auf einem Kreise, gegen welchen Reciprocität der gesammten Figur stattfindet; concentrische Kreise zu den beiden Ringkreisen schneiden die Kreisreihe unter constantem Winkel; schliesst die Kreisreihe nach einem Umgange, so schliesst sie stets, wie man auch den ersten Kreis der Reihe legt. Dasselbe gilt beim Schluss nach mehrmaligem Umgange.

Durch die Transformation $Z = \frac{1}{z}$ geht die Figur in einen excentrischen Kreisring über, die Reihe der Berührungskreise wird eine aus ungleichen Kreisen bestehende. Die genannten Eigenschaften bleiben trotzdem bestehen, z. B. besonders der Schliessungssatz.

Transformationen dieser Art hat Steiner häufig zur Lösung geometrischer Probleme angewandt. So kommt z. B. die Inversion auch beim Malfatti'schen Problem zur Geltung.

§ 19. Die isogonalen Trajectorien des Kreisbüschels.

Die aufeinander folgenden Diagonalpunkte der Rechteckseintheilung mittels des Strahlenbüschels und der concentrischen Kreis-

schaar liegen auf logarithmischen Spiralen. Die logarithmische Spirale schneidet also sämmtliche Geraden und Kreise der Eintheilung unter constantem Winkel, sie ist demnach die isogonale Trajectorie der Kreisschaar. Sie verhält sich gegen das Strahlenbüschel und die Kreise ebenso, wie die Diagonalcurve, die zur Rechteckseintheilung durch parallele Gerade und die Orthogonalschaar von Geraden gehört; diese Curve ist aber eine gerade Linie. Da aber die Rechteckseintheilung mittels Parallelen durch die Function $z = e^z$ in die Rechteckseintheilung mittels des Strahlenbüschels und der concentrischen Kreisschaar übergeht, so lassen sich in Folge der Isogonalität dieser Verwandtschaft die Eigenschaften der logarithmischen Spirale leicht aus denen der Geraden ableiten*). Dies kommt bei der logarithmischen Abbildung specieller zur Sprache. Einiges, was dort entwickelt wird, mag hier als bekannt vorausgesetzt werden. Auch vergleiche man die dortigen Figurentafeln.

Durch die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ verwandelt sich nun das Strahlenbüschel in ein Kreisbüschel, *die isogonalen Trajectorien des Strahlenbüschels gehen also über in die des Kreisbüschels.* Diese neuen Curven bezeichnete Verfasser in der eben citirten Abhandlung als *logarithmische Doppelspiralen.* Dieser Name ist auch in den kinematischen Abhandlungen von Burmester**) adoptirt worden und mag deshalb hier beibehalten werden. Offenbar folgen die Eigenschaften dieser Curvenschaar, soweit sie mit Kreisen und Geraden zusammenhängen, aus denen der logarithmischen Spirale, und auch der analytische Zusammenhang wird ein einfacher sein.

So geht z. B. nach Gl. 10) die Gleichung der logarithmischen Spirale

12) $$P = ck^{\Theta},$$

deren Pol der Punkt $a + bi$ sein mag, durch die Transformation $Z = \frac{1}{z}$ über in die der Curvenschaar

$$\frac{r_1}{r}\sqrt{a^2 + b^2} = c \,.\, k^{\vartheta_1 - \vartheta + \alpha},$$

die sich am leichtesten untersuchen lässt, wenn $b = 0$, also auch $\alpha = 0$, und $a = 1$ ist. Dann lautet die Gleichung

13) $$\frac{r_1}{r} = c \,.\, k^{\vartheta_1 - \vartheta}.$$

---

*) Vergl. des Verfassers Abhandlung: Ueber die logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden orthogonalen Curvensysteme. Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 16. S. 269—289.

**) Burmester: Kinematisch-geometrische Untersuchungen. Zeitschr. für Math. u. Phys. XX. S. 419.

Die logarithmischen Doppelspiralen haben also die Fundamentaleigenschaft, dass der Quotient der Radii vectores sich geometrisch ändert, wenn die Differenz ihrer Neigungswinkel arithmetisch wächst.

Wird ferner ein System gleichwinkliger logarithmischer Doppelspiralen von irgend einem Punkte aus der Transformation $Z = \frac{1}{z}$ *unterworfen, so geht es wiederum in ein System logarithmischer Doppelspiralen über.* Nach Gl. 11) verwandelt sich dabei die Gleichung 13), in der r_1 und r von $a_1 + b_1 i$ und $a + bi$ ausgehen mögen, in

$$\frac{q}{p}\sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a^2 + b^2}} = c \cdot k^{\chi - \varphi + (\alpha_1 - \alpha)},$$

welche dieselbe Form hat, sobald man die Wurzel und den Ausdruck $k^{\alpha_1 - \alpha}$ in die Constante c wirft. Hier gehen p und q von den Punkten $\frac{1}{a + bi}$ und $\frac{1}{a_1 + b_1 i}$ aus. Nur in dem Falle, wo man einen Büschelpunkt zum Inversionscentrum wählt, gehen die Curven in logarithmische Spiralen über. Die Ableitung der wichtigsten Eigenschaften dieser Curvensysteme, auf die wir noch mehrfach zurückkommen, geschah zuerst in der citirten Abhandlung im 16. Bande der Zeitschr. für Math. und Physik. Sie haben übrigens auch eine wichtige geographische Bedeutung als stereographische Projectionen der loxodromischen Linien. Unten sind diese Curvensysteme an geeignetem Orte dargestellt.

Hier sollen nur einige Eigenschaften angedeutet werden: Conpolare logarithmische Spiralen desselben Schnittwinkels gegen das Strahlenbüschel schneiden sich nie. Ihre isogonalen Trajectorien geben wieder ein gleichwinkliges System logarithmischer Spiralen. Mit Hülfe der Orthogonalschaar kann man eine isothermische Eintheilung der Ebene in „ähnliche Rechtecke“ erzielen. Die Reihe von Berührungskreisen in dem Streifen zwischen zwei solchen Spiralen hat die Berührungspunkte wiederum auf einer logarithmischen Spirale. *Alle diese Sätze gehen durch die Abbildung* $Z = \frac{1}{z}$ *auf die logarithmische Doppelspirale über.* Es wird sich überhaupt zeigen, dass die Sätze der „Kreisverwandtschaft“ für diese Curvensysteme von besonderer Wichtigkeit sind. Da man die Rechteckseintheilung durch Kreisbüschel (im speciellen Falle Strahlenbüschel) und Kreisschaar elementar bis ins Kleinste durchführen kann, sobald zwei Individua jeder Schaar gegeben sind, *so kann man beliebig viele Punkte der Spiralen und Doppelspiralen elementar construiren, wenn man den Pol (resp. die beiden Pole) und zwei beliebige Punkte der*

Spirale kennt. Trotz des transcendenten Charakters also sind diese interessanten Curven einer leichten und eleganten Behandlungsweise fähig.

§ 20. Die Erhaltung der Doppelverhältnisse.

In Folgendem sollen einige Sätze der *Kreisverwandtschaft* von Möbius mit besonderer Einfachheit abgeleitet werden.

In der Z-Ebene liege ein beliebiges Viereck $ABCD$, dessen Eckpunkte die Punkte $a + \alpha i$, $b + \beta i$, $c + \gamma i$, $d + \delta i$ seien, während p, q, r, s seine Seiten sind. Den Ausdruck $\frac{p \cdot r}{q \cdot s}$ bezeichnet Möbius als das *Doppelverhältniss der vier Punkte.* Vergl. Fig. 14.

Durch die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ geht das Viereck in ein Kreisbogen-Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ der z-Ebene über (Fig. 15), dessen geradlinige Seiten p_1 q_1 r_1 s_1 sein mögen, während

$$\frac{1}{a + \alpha i}, \quad \frac{1}{b + \beta i}, \quad \frac{1}{c + \gamma i}, \quad \frac{1}{d + \delta i}$$

die Eckpunkte sind. (Die Bogen schneiden sich sämmtlich in einem Punkte.)

Fasst man nun p, q, r und s als Radii vectores auf, die von A und C ausgehen, so verwandelt sich nach Formel 11) der Ausdruck $\frac{p}{q}$ resp. $\frac{s}{r}$ in

$$\frac{p_1}{q_1} \sqrt{\frac{a^2 + \alpha^2}{c^2 + \gamma^2}} \quad \text{resp.} \quad \frac{s_1}{r_1} \sqrt{\frac{a^2 + \alpha^2}{c^2 + \gamma^2}},$$

so dass also $\frac{p\,r}{q\,s}$ nach Hebung der Wurzeln in $\frac{p_1 r_1}{q_1 s_1}$ übergeht.

Folglich: *Entsprechende Punktquaternionen beider Ebenen haben die Eigenthümlichkeit, dass ihre Doppelverhältnisse denselben Werth besitzen.* —

Aus einem gewissen Grunde merke man auch folgende Form des Satzes: *Bei der Abbildung eines Vierecks mittels der Function* $Z = \frac{1}{z}$ *bleibt der Ausdruck* $(\lg p - \lg q) + (\lg r - \lg s)$ *constant.*

In welcher Weise man den Linienzug des Vierecks ausübt, ist ganz gleichgültig. Treten z. B. bei der Reihenfolge $ABDC$ die Diagonalen w und v als Seiten auf, so zeigt sich, dass auch $\frac{p\,r}{v\,w}$ und $\frac{p_1 r_1}{v_1 w_1}$ denselben Werth haben. Dasselbe gilt von dem Doppelverhältniss $\frac{q \cdot s}{v \cdot w}$ resp. $\frac{q_1 s_1}{v_1 w_1}$. Andere sind nicht vorhanden.

Ist das Viereck $ABCD$ ein *Kreisviereck*, so geht es durch In-

version von einem Punkte des Kreises aus in eine Gerade über, und $\frac{p_1 r_1}{q_1 s_1}$ *wird eins der aus der synthetischen Geometrie bekannten Doppelverhältnisse von vier Punkten auf der Geraden.* Die Geometrie dieser Doppelverhältnisse ist also ein specieller Fall von der Theorie der hier behandelten. Ist z. B. das Inversionscentrum auf einer Geraden gelegen, so gehen harmonische Punkte derselben wieder in harmonische über (vergl. § 14).

Umgekehrt kann man von der Geraden zum Kreise übergehen. So ist z. B. in Fig. 16 leicht zu zeigen, dass für je 4 beliebige Punkte der Geraden

$$\frac{p_1 r_1}{v_1 w_1} + \frac{q_1 s_1}{v_1 w_1} = \frac{p_1 r_1 + q(p_1 + q_1 + r_1)}{(p_1 + q_1)(q_1 + r_1)} = 1$$

ist. Verwandelt man nun durch die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ die Gerade in einen Kreis, so bleibt für diesen nach Obigem $\frac{pr}{vw} + \frac{qs}{vw} = 1$ oder $pr + qs = vw$. Dies gilt von jedem Kreisvierecke, so dass der *Ptolemäische Satz* auf eigenthümlichem Wege bewiesen ist.

Als besonders wichtige Analogie sei hervorgehoben, dass bei unserer Verwandtschaft die *Doppel*verhältnisse erhalten bleiben, während bei der Verwandtschaft der Aehnlichkeit die *einfachen* Verhältnisse übereinstimmen.

§ 21. Die Erhaltung der Doppelwinkel.

Ein ähnlicher Satz gilt von den Winkeln eines Vierecks und denen des durch die Transformation $Z = \frac{1}{z}$ erhaltenen Vierecks. In der Z-Ebene sei wieder das Viereck $ABCD$ beliebig gegeben. Die Neigungswinkel der Geraden p, q, r, s, v, w gegen die positive reelle Axe mögen sein $\varphi, \chi, \psi, \omega, \xi, \eta$. Betrachtet man wiederum A und C als Ausgangspunkte der Radii vectores, so verwandelt sich $ABCD$ in $A_1 B_1 C_1 D_1$ und nach Formel 11)
$\varphi - \chi$ in $\varphi_1 - \chi_1 + (\varkappa - \lambda)$ und $\omega - \psi$ in $\omega_1 - \psi_1 + (\varkappa - \lambda)$,
[$\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ sollen die Abweichungen der Punkte $ABCD$ sein].

Durch Subtraction folgt, dass $(\varphi - \chi) - (\omega - \psi)$ übergeht in $\varphi_1 - \chi_1 - (\omega_1 - \psi_1)$. Nun ist aber

$$\varphi - \chi = \sphericalangle ABC, \quad \omega - \psi = \sphericalangle ADC,$$
$$\text{also } \psi - \omega = \sphericalangle CDA.$$

Folglich hat der Doppelwinkel $ABC + CDA$ denselben Werth wie der Doppelwinkel des neuen Vierecks, $A_1 B_1 C_1 + C_1 D_1 A_1$, und es gilt der Satz: *Bei der Abbildung* $Z = \frac{1}{z}$ *ist die Summe homologer, zu entsprechenden Punktquaternionen gehöriger Gegenwinkel constant.*

Dasselbe gilt natürlich auch von den andern Gegenwinkelpaaren. Da ausserdem das Viereck auf drei verschiedene Arten aufgefasst werden kann, so bleiben folgende *Doppelwinkel* constant: $ABC + CDA$ und $BCD + DAB$, $ABD + DCA$ und $BDC + CAB$, $BCA + ADB$ und $CAD + DBC$. Für diese sechs Doppelwinkel gebraucht Möbius die bei der cyclischen Schreibweise leicht zu deutenden Bezeichnungen $\measuredangle(ABCD)$, $\measuredangle(BCDA)$, $\measuredangle(ABDC)$, $\measuredangle(BDCA)$, $\measuredangle(BCAD)$, $\measuredangle(CADB)$. — Man achte darauf, dass bei der vorliegenden Verwandtschaft die *Doppel*winkel erhalten bleiben, während bei der Verwandtschaft der Aehnlichkeit dies von den *einfachen* Winkeln gilt.

Liegen die vier Punkte z. B. auf einer Geraden, so ist der Doppelwinkel gleich 180^0. Verwandelt man durch $Z = \frac{1}{z}$ die Gerade in einen Kreis, so bleibt er nach Obigem gleich 180^0. Dies giebt den Satz über die Gegenwinkel des Sehnenvierecks.

Statt zu sagen, dass der Doppelwinkel bei beliebigen Transformationen $Z = \frac{1}{z}$ erhalten bleibe, kann man auch sagen, dass dies mit seinem Sinus der Fall ist. So ist z. B. für Punkte auf der Geraden und auf dem Kreise $\sin(ABCD) = 0$.

Um den Zusammenhang mit den Elementen der synthetischen Geometrie klar zu legen, wollen wir mit Hülfe des Obigen den Satz der synthetischen Geometrie beweisen, der durch die Formel

$$(abcd) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$$

ausgedrückt wird.

Man transformire Fig. 17 von P aus mittels $Z = \frac{1}{z}$ in Fig. 18, wobei die Winkel des Strahlenbüschels ungeändert bleiben. Da nun $\sin A_1 P_1 C_1 = \frac{A_1 C_1}{2r}$ ist, und Aehnliches von den übrigen Winkeln gilt, so ist in der gebräuchlichen Schreibweise, da die $2r$ sich heben,

$$\frac{\sin(ac)\sin(bd)}{\sin(bc)\sin(ad)} = \frac{A_1C_1 \cdot B_1D_1}{B_1C_1 \cdot A_1D_1}.$$

Nach Obigem war aber

$$\frac{A_1C_1 \cdot BD}{B_1C_1 \cdot A_1D} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD},$$

also folgt $(abcd) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$.

Man vergleiche zu § 20 und 21 folgende Abhandlungen von A. F. Möbius:

1) Ueber eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen. Verhandl. der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Math.-physicalische Klasse. 1852, I. S. 41—54.

2) Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren. Dieselben Verhandl. 1853. I. Seite 14—24.

3) Die Theorie der Kreisverwandtschaft, Abhandl. der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. IV. Seite 531—595.

§ 22. Einige Sätze der Kreis-Verwandtschaft.

Möbius zeigt, wie man von Dreiecksrelationen auf Vierecksätze schliessen kann. Als Beispiel sei der Viereckssatz von Möbius-Bretschneider bewiesen. (Fig. 19 und 20.)

Das Viereck $ABCD$ werde von D aus durch Inversion transformirt, so dass D_1 ins Unendliche fällt, während A_1, B_1, C_1 im Endlichen liegen. AC, AB und BC werden Kreisbogen, DA, DB und DC Gerade mit denselben Richtungen, wie vorher, von denen man ausserdem anzunehmen hat, dass sie sich im unendlichen Punkte, den man sich in irgend welcher Richtung zu denken hat, schneiden. Zieht man sämmtliche Sehnen des neuen Bogenvierecks, so erhält man Fig. 20, in welcher die Sehnen C_1D_1, B_1D_1, und A_1D_1 in beliebiger Richtung als Parallele gezogen sind. Es verwandelt sich also $\frac{pr}{qs}$ in $\frac{p_1r_1}{q_1s_1}$ d. h. hier in $\frac{p_1}{q_1}$, da $\frac{r_1}{s_1} = 1$ zu setzen ist. Ebenso geht $\frac{qs}{vw}$ in den gleichen Werth $\frac{q_1}{v_1}$, $\frac{pr}{vw}$ in $\frac{p_1}{v_1}$ über. Ferner wird nach dem Satze von den Doppelwinkeln

1) $ABC + CDA = A_1B_1C_1 + C_1D_1A_1 = A_1B_1C_1 + 0$,
2) $BCA + ADB = B_1C_1A_1 + A_1D_1B_1 = B_1C_1A_1 + 0$,
3) $CAB + BDC = C_1A_1B_1 + B_1D_1C_1 = C_1A_1B_1 + 0$.

Da ferner

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\sin B_1C_1A_1}{\sin C_1A_1B_1}$$

ist, so erhält man der Reihe nach mit Hülfe der übrigen Sinus-Verhältnisse folgende Relationen zwischen beiden Figuren:

1) $$\frac{pr}{qs} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{\sin B_1C_1A_1}{\sin C_1A_1B_1} = \frac{\sin (BCA + ADB)}{\sin (CAB + BDC)},$$

2) $$\frac{qs}{vw} = \frac{q_1}{v_1} = \frac{\sin C_1A_1B_1}{\sin A_1B_1C_1} = \frac{\sin (CAB + BDC)}{\sin (ABC + CDA)},$$

3) $$\frac{vw}{pr} = \frac{v_1}{p_1} = \frac{\sin A_1B_1C_1}{\sin B_1C_1A_1} = \frac{\sin (ABC + CDA)}{\sin (BCA + ADB)}.$$

Die äusseren Glieder dieser Gleichungen bilden den von *beliebigen Vierecken* geltenden Satz von Möbius-Bretschneider (vergl. Kreisverwandtschaft, Seite 552), der in des ersteren Schreibweise lautet:

$$\sin (ABCD) : \sin (BCAD) = AC.BD : BA.CD = (CABD).$$

Beim Kreisviereck entsteht, da z. B. die Winkelsumme $ABC+DCA$ gleich 180^0 wird (andere Doppelwinkel werden Null), der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$.

Es ist von Interesse, zu sehen, was aus harmonischen Punkten auf der Geraden wird, für welche $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = -1$ ist. Es entsteht ein Kreisviereck, für welches nach § 20 (oder nach Ptolemäus)

$$A_1C_1 \cdot B_1D_1 + A_1D_1 \cdot B_1C_1 = A_1B_1 \cdot C_1D_1,$$

also in unserem speciellen Falle, wo $\frac{A_1C_1 \cdot B_1D_1}{A_1D_1 \cdot B_1C_1} = -1$ wird,

$$2A_1C_1 \cdot B_1D_1 = 2A_1D_1 \cdot B_1C_1 = A_1B_1 \cdot C_1D_1$$

ist. *Aus harmonischen Punkten wird also ein Kreisviereck, in dem das Product des einen Gegenseitenpaares gleich dem des andern, das Diagonalenproduct also das Doppelte von jedem ist.*

Sind drei Punkte $A_1B_1C_1$ des Vierecks gegeben, so lässt sich der vierte D_1 construiren, indem man den Pol F_1 von A_1B_1 bildet und F_1C_1 bis zum Durchschnitte D_1 zieht. (Fig. 21.)

Beweis.

$\triangle A_1C_1F_1 \sim \triangle D_1A_1F_1$, also $A_1C_1 : D_1A_1 = F_1C_1 : F_1A_1$.

Ebenso

$\triangle B_1C_1F_1 \sim \triangle D_1B_1F_1$, also $B_1C_1 : D_1B_1 = F_1C_1 : F_1B_1$.

Da $F_1C_1 = F_1C_1$ und $F_1A_1 = F_1B_1$ ist, so folgt $\frac{A_1C_1}{A_1D_1} = \frac{B_1C_1}{B_1D_1}$, also auch $A_1C_1 \cdot B_1D_1 = B_1C_1 \cdot A_1D_1$, wie oben verlangt wird. —

Selbstverständlich schneiden sich auch A_1B_1 und die Tangenten in C_1 und D_1 in einem Punkte, woraus noch eine zweite Construction folgt. — Man könnte diese Vierecke als *harmonische Kreisvierecke* bezeichnen.

Weiteres über dieses interessante Gebiet der Geometrie sehe man bei Möbius. Dass ganz allgemein Sätze der Geometrie der Lage, soweit sie Gerade und Kreise betreffen, mit Hülfe der Transformation $Z = \frac{1}{z}$ in andere übertragen werden können, ist selbstverständlich. Sätze von Punkten auf einer Geraden (z. B. der Pascal'sche Satz vom Kreise), von Geraden, die sich in einem Punkte schneiden (z. B. der Brianchon'sche), von harmonischen Punkten und Strahlen gehen in leicht auszusprechende über, bei denen nur an Stelle der Geraden in der Regel ein Kreis zu setzen ist.

§ 23. Bedeutung des Differentialquotienten von $Z = \frac{1}{z}$.

Da bei unserer Abbildung Kreise in Kreise übergehen, so gilt dies auch von verschwindend kleinen Kreisen, und je kleiner diese sind, um so mehr kann man annehmen, dass der Mittelpunkt dem Mittelpunkte, einem beliebigen Durchmesser d ein bestimmter Durchmesser d_1 entspricht. Ist nun die Entfernung des unendlich kleinen gegebenen Kreises vom Nullpunkt r, die des entsprechenden $\frac{1}{r}$, so wird, wie sich aus der zugehörigen Figur sofort ergiebt,

$$d_1 : d = \frac{1}{r} : r,$$

also

$$d_1 = \frac{d}{r^2}.$$

Folglich: *Bei der Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ wird jede Stelle der z-Ebene in der Entfernung r vom Nullpunkte im $\frac{1}{r^2}$-fachen Massstabe in die Z-Ebene übertragen.*

Nun ist aber

$$\frac{dZ}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{r^2}\left[\cos(-2\varphi) + i\sin(-2\varphi)\right]$$
$$= \frac{1}{r^2}\left[\cos(\pi - 2\varphi) + i\sin(\pi - 2\varphi)\right],$$

folglich *stimmt der absolute Betrag des Differentialquotienten mit dem obigen Vergrösserungsverhältniss überein.*

Dasselbe findet, wie sich später zeigen wird, bei allen Functionen complexen Arguments statt.

Da ferner der Richtungswinkel φ jedes Punktes der z-Ebene in $-\varphi$ verwandelt wird, die Linie vom Nullpunkte nach ihm also um 2φ gedreht wird, so muss, da sie in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, von jedem Stück AB derselben angenommen werden, dass es in der Z-Ebene um den Winkel $\varphi - 2\pi$ gegen die Anfangslage verdreht erscheint. Wegen der Conformität gilt dies von jedem kleinen geometrischen Gebilde auf dieser Linie oder in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft. Nun war aber $\pi - 2\varphi$ die Abweichung des Differentialquotienten, folglich: *Die Abweichung des Differentialquotienten für irgend eine Stelle giebt bei vorliegender Abbildung an, um welchen Winkel jedes verschwindend kleine Gebilde bei der Uebertragung in die Z-Ebene gegen die Anfangslage verdreht wird.*

Auch dieser Theil des Satzes gilt von allen Functionen eines complexen Arguments. Für die Kartographie ist die Kenntniss dieser Vergrösserungs- und Drehungsverhältnisse unentbehrlich.

§ 24. Die behandelten Coordinatensysteme genügen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Theilt man die Ebene mittels der orthogonalen Parallelenschaaren $x = a$ und $y = b$ in congruente Rechtecke ein, so müssen die Werthe von a und b arithmetischen Reihen folgen. Dass sowohl x für sich, als auch y der obigen Differentialgleichung genügt, ist selbstverständlich.

Nach § 7 geschieht Entsprechendes bei der Eintheilung der Ebene mittels der concentrischen Kreise um den Nullpunkt und ihrer Radien. Man erhält nämlich ähnliche Rechtecke, wenn in den Gleichungen $\lg r = \alpha$ und $\vartheta = \gamma$ α und γ arithmetischen Reihen folgen. In Cartesischen Coordinaten lauten beide Gleichungen: $\frac{1}{2}\lg(x^2 + y^2) = \alpha$ und $\arctan\frac{y}{x} = \gamma$. Differentiirt man aber $\frac{1}{2}\lg(x^2 + y^2)$ zweimal partiell nach x und ebenso zweimal partiell nach y, so giebt die Summe der Resultate identisch Null.

[Setzt man z. B. $\frac{1}{2}\lg(x^2 + y^2) = u$, so ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.]$$

Dasselbe gilt von $\arctan\frac{y}{x}$, wie man sich leicht überzeugen kann. Nach Lamé bezeichnet man aber ein Curvensystem, welches sich in einer reellen Form $u = c$ schreiben lässt, deren linke Seite identisch der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt, als ein *isothermisches*. Die genannten Systeme sind also isothermische im Lamé'schen Sinne. Es wird sich später zeigen, dass diese Erklärung der isothermischen Curvensysteme mit der in § 17 gegebenen identisch ist.

Die beiden eben besprochenen Curvensysteme lassen sich übrigens fast übereinstimmend in folgenden Formen schreiben:

$$\frac{1}{2}\Big[\lg(x + yi) + \lg(x - yi)\Big] = \alpha,$$

$$\frac{1}{2i}\Big[\lg(x + yi) - \lg(x - yi)\Big] = \gamma.$$

Die letztere Gestalt folgt aus der Formel $\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi}{x-yi}$.

Handelt es sich um das Strahlenbüschel durch $a + bi$ und die concentrische Kreisschaar, so ist die *isothermische Form* der Gleichung, d. h. die Schreibweise, in der arithmetisch aufeinander folgende

Werthe der rechten Seiten „Rechteckseintheilung" geben, während die linken identisch der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{1}{2}\log\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]=\alpha, \quad \arctan\frac{y-b}{x-a}=\gamma.$$

Fast identisch sind sie zu schreiben in der Gestalt

$$\frac{1}{2}\left[\lg\Big(x+yi-(a+bi)\Big)+\lg\Big(x-yi-(a-bi)\Big)\right]=\alpha,$$

$$\frac{1}{2i}\left[\lg\Big(x+yi-(a-bi)\Big)-\lg\Big(x-yi-(a-bi)\Big)\right]=\gamma.$$

Das nächste Isothermensystem hatte man nach § 17 in den Gleichungen

$$\lg\frac{p}{q}=\alpha \quad \text{und} \quad (\varphi-\chi)=\gamma,$$

wo p und q von irgend welchen Punkten $a+bi$ und a_1+b_1i ausgehen. In Cartesischen Coordinaten lauten die Gleichungen

$$\frac{1}{2}\lg\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}=\alpha,$$

$$\arctan\frac{y-b}{x-a}-\arctan\frac{y-b_1}{x-a_1}=\gamma.$$

Auch hier genügen die linken Seiten der Differentialgleichung, die man abgekürzt als $\Delta u=0$ schreibt. Die beiden fast übereinstimmenden imaginären Schreibweisen sind

$$\frac{1}{2}\left[\lg\Big(x+yi-(a+bi)\Big)+\lg\Big(x-yi-(a-bi)\Big)\right]\cdot$$
$$-\frac{1}{2}\left[\lg\Big(x+yi-(a_1+bi_1)\Big)+\lg\Big(x-yi-(a_1-b_1i)\Big)\right]=\alpha,$$

$$\frac{1}{2i}\left[\lg\Big(x+yi-(a+bi)\Big)-\lg\Big(x-yi-(a-bi)\Big)\right]$$
$$-\frac{1}{2i}\left[\lg\Big(x+yi-(a_1+b_1i)\Big)-\lg\Big(x-yi-(a_1-b_1i)\Big)\right]=\gamma.$$

Auf die isothermischen Gleichungen der logarithmischen Spirale und Doppelspirale kommen wir später zurück. Als Grund der Eigenthümlichkeit, dass der Differentialgleichung genügt wird, mag schon jetzt angedeutet werden, dass jede der betrachteten linken Seiten der reelle oder der von i befreite imaginäre Theil einer Function complexen Arguments ist.

§ 25. Physikalische Andeutungen.

Da der Differentialgleichung $\Delta u=0$ genügt wird, so ist die Gleichung jedes der betrachteten isothermischen Curvensysteme als Integral derselben zu betrachten. Dies ist aber von Wichtigkeit

für gewisse Probleme der mathematischen Physik, die auf diese Integration hinauskommen. Um für die folgenden abstracteren und schwierigeren Untersuchungen zu interessiren, mögen einige physikalische Fragen (selbstverständlich ohne Beweis des Zusammenhangs) besprochen werden.

Ein ebener Flächenstreifen von unbegrenzter Länge, den Fig. 22 andeutet, werde von den Linien $x_0 = \alpha_0$ und $x_1 = \alpha_1$ begrenzt, deren erstere constant auf der Temperatur Null, die andere auf der Temperatur 1^0 erhalten werde. (Eigentlich müsste von einem auf diesem Streifen stehenden Prisma von unbegrenzter Höhe nach oben und unten gesprochen werden, von dem der ebene Streifen ein Querschnitt ist.) Nach einiger Zeit tritt der Theorie gemäss ein stationärer Zustand ein, während dessen jeder Punkt von der einen Seite her soviel Wärme erhält, wie er nach der andern abgiebt, so dass sich nichts mehr ändert. Dass die halbirende Gerade, die also den Streifen in congruente Theile theilt, die mittlere Temperatur hat, also eine *Isotherme* ist, wird man ohne Weiteres zugeben. Durch fortgesetztes Halbiren erhält man die Temperaturen der übrigen Isothermen. So hat z. B. die Isotherme $x = \alpha$ die Temperatur $t = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}$ *), oder, wenn man für α die Variabele x einsetzt:

$$t = \frac{x - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}.$$

Diese Function genügt der Gleichung $\Delta u = 0$, ist innerhalb des Streifens endlich, stetig und eindeutig und hat auf den beiden Grenzlinien die festgestellten Temperaturen.

Dass die Wärme von der einen Linie zur andern orthogonal wandert, wird man gleichfalls zugeben. Die Orthogonalen nennt man daher *Strömungslinien der Wärme.*

Dass Strömungslinien und Isothermen in gewissem Sinne mit einander vertauscht werden können, ist hier selbstverständlich.

Jetzt denke man sich statt der beiden Parallelen zwei concentrische Kreise mit den Radien $\lg r_0 = \alpha_0$ und $\lg r_1 = \alpha_1$ auf den Temperaturen 0^0 und 1^0 erhalten. Dann sind offenbar concentrische Kreise die Isothermen. Nach der Theorie berechnet sich die Temperatur der Isotherme $\lg r = \alpha$ wieder als

$$t = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} = \frac{\lg \frac{r}{r_0}}{\lg \frac{r_1}{r_0}} = \frac{\lg \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{r_0}}{\lg \frac{r_1}{r_0}},$$

*) Vergl. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes. (Paris, 1859.) Pag. 188.

und zwar deshalb, weil der in Cartesischen Coordinaten gegebene Ausdruck der Differentialgleichung $\triangle u = 0$ genügt, weil er innerhalb des Kreisringes endlich, stetig und eindeutig ist, und weil er auf dem Rande die gegebenen Werthe 0 und 1 hat. Die mittlere Temperatur liegt also hier auf der Isotherme, welche den Ring in zwei ähnliche Ringe zerlegt. In diesem Falle sind übrigens die orthogonalen Radien als Strömungslinien aufzufassen.

Nimmt man zwei Radien als Grenzlinien an, z. B. die Linie mit der Neigung ϑ_0 und ϑ_1, so herrscht bei der obigen Temperaturannahme auf der Isotherme ϑ die Temperatur

$$t = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_1 - \vartheta_0} = \frac{\arctan \frac{y}{x} - \vartheta_0}{\vartheta_1 - \vartheta_0},$$

denn wiederum genügt der Ausdruck den mehrfach ausgesprochenen Forderungen der Theorie. Jetzt sind die concentrischen Kreise als Strömungslinien aufzufassen.

Durch die Abbildung $z = e^z$ wird nun die Rechteckseintheilung, welche den Temperaturzustand des Parallelstreifens veranschaulichte, in die Rechteckseintheilung durch concentrische Kreise und Radien übertragen, *also ist der Temperaturzustand des concentrischen Ringes gewissermassen eine conforme Abbildung des Wärmezustandes des Parallelstreifens.* Besonders wichtig ist für die Kreise, dass bei Eintheilung des Ringes in ähnliche aufeinander folgende Streifen von Isotherme zu Isotherme gleiche Temperaturdifferenz stattfindet. Solche Streifen sollen als *correspondirende* bezeichnet werden. Aehnliches findet bei jeder conformen Abbildung und den entsprechenden Wärmeaufgaben statt.

Hat man z. B. zwei nicht concentrische Kreise, von denen der grössere den andern einschliessen oder ausschliessen mag, so construire man zunächst nach bekannter Methode die Potenzlinie, auf welcher die Mittelpunkte des orthogonalen Kreisbüschels liegen, und bestimme mittels eines Orthogonalkreises auf der Centrale die beiden Büschelpunkte. In Bezug auf diese lassen sich dann die Kreisgleichungen schreiben:

$$\lg \frac{p}{q} = \alpha_0 \quad \text{und} \quad \lg \frac{p}{q} = \alpha_1.$$

Isothermen sind dann die Kreise $\lg \frac{p}{q} = \alpha$. Auf einer solchen herrscht dann die Temperatur

$$t = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} = \frac{\frac{1}{2} \lg \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0},$$

wenn $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ die beiden Büschelpunkte sind, denn wiederum genügt dieses t der Differentialgleichung $\triangle u = 0$, ist

innerhalb des Streifens endlich, eindeutig und stetig, und nimmt auf den Rändern die gegebenen Werthe 0^0 und 1^0 an. Strömungslinien sind jetzt die Büschelkreise. Die Linie der mittleren Temperatur ist leicht zu construiren. Es ist derjenige Kreis, gegen den der erste der reciproke des zweiten ist. Vergl. Fig. 13.

Ein specieller Fall ist der, wo beide Kreise verschwindend klein sind, gewissermassen Punkte, die auf verschiedenen constanten Temperaturen gehalten werden. Die Zeichnung bleibt dann dieselbe. Eine der Isothermen ist die symmetrische Gerade zwischen den Büschelpunkten. Denkt man sich die kleinen Kreise gleich gross, so herrscht auf dieser Geraden, also auch in dem unendlichen Bereiche, den keine andere Isotherme erreicht, die mittlere Temperatur.

Nimmt man endlich zwei Büschelkreise als gegebene, z. B. die Kreise $\varphi - \chi = \alpha_0$ und $\varphi - \chi = \alpha_1$, so herrscht auf den Isothermen $\varphi - \chi = \alpha$ die Temperatur $t = \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}$, wo für α zu setzen ist $\arctan \frac{y-b}{x-a} - \arctan \frac{y-b_1}{x-a_1}$, wenn $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ die Büschelpunkte sind. Als Strömungslinien treten wieder die Orthogonalkreise auf.

Die Linien gleicher Temperatur entsprechen ganz den Niveauflächen oder Flächen gleichen Potentials im Raume. Im Raume ist das Potential für die Fernewirkung eines Massenpunktes auf einen andern nach dem Newton'schen Gesetze der Ausdruck $\frac{c}{r}$, wobei c eine von den Massen abhängige Constante bedeutet. Dieser Ausdruck genügt in Cartesischen Coordinaten der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Er ist constant für concentrische Kugelflächen.

Man kann auch die obigen Isothermen als *Niveaulinien* oder *Linien gleichen Potentials* auffassen und demnach die Function, welche den stationären Temperaturzustand angiebt, als Potentialfunction betrachten. Der einfachste Fall ist der, wo die Niveaulinien concentrische Kreise sind. Man hatte denselben, wenn zwei concentrische Kreise auf constanten Temperaturen erhalten wurden. Einer derselben mag, damit einige Analogie mit dem Massenpunkte erreicht werde, von kleinem Durchmesser sein, während der andere sehr gross sein mag. An Stelle des Massenpunktes, dessen Charakter ein constanter ist, ist also die constante Wärmequelle getreten. Hierbei wurde die Potentialfunction

$$t = \frac{\lg \frac{r}{r_0}}{\lg \frac{r_1}{r_0}},$$

oder, wenn die Constanten in c vereinigt werden, $t = c \,.\, \lg r$, während für den Raum $\frac{1}{r}$ massgebend war. Das neue Potential wird daher als das *logarithmische* bezeichnet.

Wie nun im Raume vom Potential eines Massenpunktes zum Potential mehrerer übergegangen wird, mögen letztere getrennt sein oder ein continuirliches Ganzes bilden, eine Linie, eine Fläche oder einen Körper von beliebiger Gestalt, so geht man hier über zu mehreren Wärmequellen, seien dieselben nun Punkte (kleine Kreise) oder Linien. Ein solcher Fall war bereits der auf die nicht concentrische Kreisschaar führende, wo zwei Punkte auf verschiedenen Temperaturen gehalten wurden. Auf schwierigere Fälle kommen wir später zurück.

Jedoch auch andere physikalische Probleme stehen unter der Herrschaft des logarithmischen Potentials, z. B. folgendes: Man denke sich eine unbegrenzte ebene Platte, in welche in gewissen Punkten in constanter Weise *Elektricität* eingeleitet, in anderen, eventuell im unendlichen Bereiche, abgeleitet wird, dann stellt sich nach einiger Zeit ein stationärer Zustand ein, für welchen die elektrische Spannung jedes Punktes der Platte berechnet werden soll. Für den einfachsten Fall, in welchem z. B. Elektricität nur im Nullpunkte einströmt, im unendlichen Bereiche ausströmt, hat Kirchhoff*) unter Zugrundelegung des Ohm'schen Gesetzes theoretisch und experimentell nachgewiesen, dass das Potential, d. h. hier die Spannung,

$$V = - c \lg r$$

ist, wo c für $\frac{E}{2\pi k \delta}$ gesetzt ist und E die einströmende Elektricitätsströmung, k die Leitungsfähigkeit, δ die verschwindend kleine Dicke der Platte bedeutet. Die Niveaulinien (Linien gleicher Spannung) der einzelnen Probleme werden demnach mit den vorher besprochenen Isothermen, die Strömungslinien der Elektricität mit denen der Wärme übereinstimmen. Ist z. B. nur *ein* Ausströmungs- und *ein* Einströmungspunkt im Endlichen vorhanden, so sind die Strömungslinien Kreisbüschel durch beide Punkte, die Spannungslinien ortho-

*) Kirchhoff: Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. Poggendorf's Annalen Bd. 64, 1845, und Bd. 67, 1846. Abgedruckt in desselben „Gesammelten Abhandlungen", Leipzig, Barth, 1881, Seite 1—22.

gonale Kreise. Längs der Strömungslinien kann man die Scheibe ausschneiden, ohne den Vorgang zu ändern. Geschieht dies im letztgenannten Falle, so hat man eine *kreisförmige Scheibe mit zwei Elektroden am Rande.* Experimentelle Bestätigungen dieser Theorie hat besonders Guébhard*), auf dessen interessante Versuche wir zurückkommen, geliefert.

Auf eine dritte Art physikalischer Erscheinungen, derjenigen Flüssigkeitsbewegungen nämlich, bei denen ein logarithmisches Geschwindigkeitspotential existirt, können wir jetzt noch nicht eingehen. Besonders die Theorie der freien Flüssigkeitsstrahlen hat durch Verbindung mit den Functionen complexen Arguments einen wichtigen Schritt vorwärts gethan.

§ 26. Einige Beispiele von inversen Curven.

Die Anwendung der Inversion auf beliebige Curven bietet einen nicht uninteressanten Uebungsstoff. Einige Beispiele seien angegeben.

1) Die Schaar der confocalen Ellipsen um die Brennpunkte ± 1 und der confocalen orthogonalen Hyperbeln gehen durch Inversion vom Centrum aus in welche Curven über? (Vgl. Fig. 38 a.)

Die Gleichungen lassen sich in der Form $p \pm q = c$ schreiben, wobei die Radii vectores von ± 1 ausgehen. Nach § 15, Formel 10, geht der Radiusvector $p = c_1$ (Kreis um $+1$) über in den Kreis $\frac{r_1}{r}\sqrt{1 + c^2} = c_1$, wo r_1 von $\frac{1}{1}$ und r von Null ausgeht, also, wenn die Bezeichnung p beibehalten wird, in $\frac{p}{r} = c_1$, ebenso geht $q = c_2$ über in $\frac{q}{r} = c_2$. Die Gleichung $p \pm q = 0$ also verwandelt sich in die von Curven mit dem Gesetz der Radii vectores

$$\frac{p \pm q}{r} = c.$$

wobei p von $+1$, q von -1 und r von Null ausgeht. Wir kommen auf dieses Curvensystem später zurück. Vergl. Fig. 43 a).

2) Die Schaar der confocalen Lemniscaten mit den Brennpunkten ± 1 und das orthogonale Büschel gleichseitiger Hyperbeln geht durch Inversion vom Centrum aus in welche Curven über?**)

Es mag als bekannt vorausgesetzt werden — später wird es auf einfachem Wege bewiesen — dass die Gleichungen beider

*) Vgl. Guébhard: Sur une méthode expérimentale propre à déterminer les lignes de niveau dans l'écoulement stationnaire de l'éctricité etc. Comptes rendus, 90, 1880, 26 avril.

**) Vgl. Fig. 29.

gegebenen Curvengruppen sind: $p_1 . p_2 = c$ und $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \gamma$, wo die Radii vectores von ± 1 ausgehen und die ϑ ihre Neigungen bedeuten. Wie vorher ist statt p_1 und p_2 zu schreiben $\frac{p_1}{r}$, resp. $\frac{p_2}{r}$, also entsprechen den confocalen Lemniscaten die Curven des Gesetzes

$$\frac{p_1 p_2}{r^2} = c,$$

wo p_1 von $+1$, p_2 von -1 und r von Null ausgeht.

Nach Formel 10) in § 15, geht ϑ_1 über in $\vartheta_1 - \varphi + \alpha$, wo $\alpha = 0$ ist, ebenso ϑ_2 in $\vartheta_2 - \varphi$, so dass man erhält

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 - 2\varphi = \gamma$$

als Gesetz der den gleichseitigen Hyperbeln entsprechenden Curven. Sämmtliche Curven sind übrigens Lemniscaten (Cassini'sche Linien). Vergl. Fig. 32. —

3) Die Polargleichung der Parabel für den Brennpunkt lautet $p . \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = c = \frac{P}{4}$. Wie lautet die Gleichung der reciproken Curven, wenn der Brennpunkt Inversionscentrum ist?

Nur p verwandelt sich in $\frac{1}{p}$. Die Gleichung lautet

$$\frac{1}{p} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = c$$

und stellt eine *Cardioide* dar. Es handelt sich um Inversion der Fig. 33.

4) Auf der positiven Hälfte einer Geraden (Fig. 23) mögen zwei Punkte A_1 und A_2, auf der negativen, und zwar symmetrisch, zwei Punkte B_1 und B_2 liegen. Zu den Curven $(\vartheta_2 - \vartheta_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) = \gamma$ gehört dann offenbar die symmetrische Senkrechte, und zwar genügt dieselbe, da $\alpha - \beta = 0$ ist, der Gleichung $(\vartheta_2 - \vartheta_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) = 0$. Ausserdem genügen der letzteren das Stück $A_1 A_2$ und die Aussenstücke der gegebenen Geraden. Durch Inversion von irgend einem Punkte aus gehen aber nach Gleichung 10 des § 15 die Curven $(\vartheta_2 - \vartheta_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) = \gamma$ über in Curven derselben Gleichung (denn gewisse Stücke heben sich weg), nur liegen die Ausgangspunkte der Radii vectores auf einem Kreise, der der gegebenen Geraden entspricht. Der Senkrechten entspricht ein orthogonal schneidender Kreis, in Bezug auf den A_1 und B_1, ebenso A_2 und B_2 reciprok sind. Folglich: Zu den letztgenannten Curven gehört (Fig. 24) der Orthogonalkreis und gewisse Stücke des anderen Kreises. Die Gleichung ist: $(\vartheta_2 - \vartheta_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) = 0$.

Kirchhoff, der hierfür einen andern Beweis giebt, benutzt dies in der citirten Abhandlung zur Lösung des Problems, die stationäre Strömung auf einer Kreisscheibe zu bestimmen, wenn die

Elektroden B_1 und B_2 irgendwo im Innern liegen. Für die Gleichungen der Strömungs- und Spannungscurven nimmt er die Punkte A_1 und A_2 zu Hülfe. Die Linien $\vartheta_2 - \vartheta_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) = \gamma$ werden Strömungslinien, die Orthogonalen $\lg \frac{r_2}{r_1} + \lg \frac{r'_2}{r'_1} = c$ werden Spannungscurven. Dass dies die Orthogonalen sind, zeigen wir später gelegentlich. Man kann dies leicht auf n resp. $2n$ Punkte ausdehnen.

§ 27. Litteratur.

Ueber Potenz, Aehnlichkeitspunkte, Kreisschaaren und Kreisbüschel, über Reihen von Berührungskreisen etc. vergleiche man Steiner: Einige geometrische Betrachtungen, Crelle's Journal, I, Seite 161—184, und die Fortsetzung derselben, I, Seite 252—288. Abgedruckt in: Jacob Steiner gesammelte Werke, im Auftrage der Kgl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin herausgegeben von Weierstrass, Berlin, 1881. I, Seite 17—76. Auch die Lösung des *Malfatti'schen Problems* wird daselbst gegeben.

Ferner Steiner: Die geometrischen Constructionen mittels der geraden Linie und eines festen Kreises. Abgedruckt in den gesammelten Werken, I, Seite 461—522.

Ferner die Aufgabensammlung in Steiner: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Abgedruckt in den gesammelten Werken, I, Seite 229—460.

Ausserdem Steiner: Théorèmes à démonstrer et problèmes à résoudre, Gergonne, Annales de Math. XVIII. Gesammelte Werke, I, S. 455. — Das Wesentliche findet man auch in Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, herausgegeben von Geiser und Schröter. Leipzig, 1867.

Ueber das Princip der reciproken Radii vectores giebt ein besonderes Capitel Geiser: Einleitung in die synthetische Geometrie. Leipzig, 1869. Cap. VIII.

Uebungsbeispiele zur Inversion giebt Petersen: Methoden und Theorieen zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben. Kopenhagen, Höst u. Sohn. Deutsche Ausgabe 1879. Vergl. auch dessen Abhandlung: „Die Steiner'sche Lösung der Malfatti'schen Aufgabe", Crelle's Journal, Bd. 89, Seite 127—135. Auch Schröter behandelt diese Aufgabe in Crelle's Journal, Bd. 77, Seite 230. Ueberall kommt die Inversion zur Anwendung.

Die Möbius'schen Abhandlungen sind schon in § 21 citirt. Einige Sätze der Kreisverwandtschaft geben auch Baltzer's Elemente der Mathematik, Leipzig, 1870, § 14 in Verbindung mit einigen Litteraturangaben.

Viertes Capitel.

Die Abbildung $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ und die Kreisverwandtschaft.

§ 28. Allgemeiner Charakter dieser Abbildung.

Der Charakter der Abbildung $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ soll zunächst ohne Rechnung auf elementarem Wege ermittelt werden.

1) Ist a reell, so bedeutet $Z = \frac{a}{z}$ dasselbe, wie $Z = \frac{1}{z}$, nur ist noch eine Vergrösserung sämmtlicher Gebilde der Z-Ebene mittels des Factors a vorzunehmen. An Stelle der Inversion gegen den Einheitskreis tritt Inversion gegen den Kreis mit Radius $\sqrt{a}$ um den Nullpunkt, denn aus $Z : \sqrt{a} = \sqrt{a} : z$ folgt die gegebene Beziehung $Z = \frac{a}{z}$.

2) Ist a nicht reell, sondern von der Form $a_1 (\cos\alpha + i \sin\alpha)$, so bedeutet $Z = \frac{a}{z}$ dasselbe, wie vorher, nur wird die Z-Ebene noch um den Winkel α gedreht, und zwar um den Nullpunkt.

3) $Z = \frac{1}{z+b}$ bedeutet folgende Operationen: Jeder Punkt der z-Ebene ist um die Strecke b zu verschieben, darauf mittels des neuen Einheitskreises reciprok abzubilden, worauf das Umklappen um die neue reelle Axe erfolgt. Es handelt sich also im Wesentlichen um Inversion gegen den Einheitskreis um den Punkt $z = -b$. Daher entspricht dem Punkte $z = -b$ der Punkt $Z = \infty$, der Punkt $z = 0$ entspricht dem Punkte $Z = \frac{1}{b}$, während $z = \infty$ in $Z = 0$ übergeht.

4) $Z = \frac{a}{z+b}$ bedeutet dasselbe, nur tritt noch die Vergrösserung um den Factor a_1 und die Drehung um den Winkel α hinzu, wenn $a = a_1 (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ ist. Bei $Z = c + \frac{a}{z+b}$ tritt zum Vorigen noch eine Verschiebung um die complexe Strecke c.

5) Der allgemeine Fall $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ erledigt sich demnach folgendermassen: Durch Ausführung der Division findet man

$$Z = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}},$$

was geometrisch folgender Reihe von Operationen entspricht:

Man verschiebe jeden Punkt der z-Ebene um die Strecke $\frac{c}{d}$, schlage um den neuen Nullpunkt einen Kreis mit einem Radius, der gleich dem absoluten Betrage von $\sqrt{\frac{bc-ad}{c^2}}$ ist, führe die Inversion gegen denselben durch und klappe die Ebene um die neue reelle Axe, darauf drehe man das Ganze um den neuen Nullpunkt, und zwar um einen Winkel β, der gleich der Abweichung von $\frac{bc-ad}{c^2}$ ist und verschiebe endlich die Ebene um die Strecke $\frac{a}{c}$.

Die Inversion konnte auch um den neuen Einheitskreis durchgeführt werden, worauf jedoch Vergrösserung mittels des absoluten Betrags von $\frac{bc-ad}{c^2}$ vorzunehmen war. — Dass man Umklappen und Drehung durch das Umklappen um eine Gerade mit der Abweichung von $\sqrt{\frac{bc-ad}{c^2}}$ ersetzen kann, wird sich später zeigen.

Dabei entsprechen sich folgende Punkte:

	$z=\infty$ und $Z=\frac{a}{c}$	(Inversionscentrum der Z-Ebene),
	$z=0$ und $Z=\frac{b}{d}$,	
(Inversionscentrum der z-Ebene)	$z=-\frac{d}{c}$ und $Z=\infty$,	
	$z=-\frac{b}{a}$ und $Z=0$.	

Man findet also den *Inversionspunkt*, oder, wie Möbius sagt, den *Centralpunkt* jeder der beiden Ebenen, indem man die Variabele der anderen unendlich gross macht und den entsprechenden Werth aufsucht.

Nach dem Gesagten bedeutet die Abbildung mittels der gebrochenen Function 1ten Grades *eine Inversion, verbunden mit Verschiebungen, einem Umklappen und einer Drehung*, denn die Vergrösserung ist bereits durch den Inversionsradius gegeben. Nur die erstgenannte dieser Operationen beeinflusst den geometrischen Charakter der Gebilde, folglich behält die neue Abbildung die wesentlichen Eigenschaften der Abbildung $Z=\frac{1}{z}$. Aus Capitel III folgt demnach:

Kreisen der z-Ebene entsprechen Kreise der Z-Ebene, die eventuellen Schnittwinkel sind in beiden Ebenen gleich, die Abbildung ist also eine conforme, die Verwandtschaft eine isogonale, und zwar diejenige, welche Möbius als Kreisverwandtschaft bezeichnet hat; die Doppelverhältnisse und Doppelwinkel bleiben erhalten.

Jedem Kreisbüschel durch zwei Punkte z_1 und z_2 der z-Ebene entspricht also ein Kreisbüschel durch die Punkte $Z_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}$ und $Z_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$ der Z-Ebene, auch die zugehörigen orthogonalen Kreisschaaren entsprechen einander, ebenso die zu einem Schnittwinkel α gehörigen isogonalen Trajectorien. *Es bleiben also nicht nur die Kreise, sondern auch die logarithmischen Doppelspiralen erhalten.* Das Strahlenbüschel durch z_1 und ∞ geht über in das Kreisbüschel durch $Z_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}$ und $Z_2 = \frac{a}{c}$, wodurch gleichzeitig über die orthogonalen concentrischen Kreise und isogonalen logarithmischen Spiralen des ersten Büschels verfügt ist. Dass Kreise durch $-\frac{d}{c}$ in Gerade übergehen, ist ebenso selbstverständlich.

Das Strahlenbüschel durch das Inversionscentrum $-\frac{d}{c}$ und den unendlichen Punkt ist das einzige, welches wieder in ein Strahlenbüschel übergeht, und zwar in das durch das Inversionscentrum $\frac{a}{c}$ und den unendlichen Punkt gehende. Hier bleiben sowohl die concentrischen Kreise, als auch die logarithmischen Spiralen erhalten.

Welche speciellen Individua der genannten Curvengruppen einander entsprechen, lässt sich am einfachsten bei der analytischen Formulirung der gegenseitigen Beziehungen beider Ebenen erörtern.

§ 29. Fälle involutorischen Verhaltens.

Die Umkehrung von

$$Z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{ist} \quad z = \frac{b-dZ}{cZ-a} = -\frac{d}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{Z-\frac{a}{c}},$$

woraus man sofort die umgekehrte Reihenfolge der Operationen erkennt. Wichtig ist, dass der *Radius des Inversionskreises und ebenso die Verdrehung dieselbe ist, wie vorher, da der massgebende Ausdruck $\frac{bc-ad}{c^2}$ derselbe ist, wie oben.* Das Inversionscentrum ist aber jetzt der Punkt $\frac{a}{c}$. Verschiebt man die Ebenen so, dass die Inversionscentra $-\frac{d}{c}$ und $\frac{a}{c}$ zusammenfallen, so kann man mittels einer Drehung und eines Umklappens *die vollständige Inversionslage erhalten.* Dies gilt überhaupt von kreisverwandten Ebenen.

Möbius nennt dies die *involutorische Lage.* Der analytische Begriff des involutorischen Verhaltens ist jedoch etwas anders aufzufassen. Wir nennen eine Abbildung involutorisch, wenn die in-

verse Function der abbildenden Function mit letzterer übereinstimmt. Um dies bei $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ zu erreichen, hat man nur $d = -a$ zu zetzen. So erhält man *die involutorische Verwandtschaft*

$$Z = \frac{az+b}{cz-a} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc+a^2}{c^2}}{z - \frac{a}{c}},$$

deren Umkehrung in der That von derselben Form ist, nämlich

$$z = \frac{aZ+b}{cZ-a} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc+a^2}{c^2}}{Z - \frac{a}{c}},$$

Die Inversionskreise decken sich hier vollständig, dennoch befinden sich die Ebenen nicht in der Inversionslage. Ist nämlich β die Abweichung von $\frac{bc+a^2}{c^2}$, so entspricht einem Punkte, dessen Abweichung gegen das Inversionscentrum α ist, ein Punkt, für den letztere den Werth $\alpha - \beta$ hat. Beide liegen also nicht auf demselben Strahle durch das Inversionscentrum, wie es die Inversionslage erfordert, auch nicht auf Strahlen von entgegengesetzter Abweichung gegen die reelle Axe. Dennoch ist das Verhalten ein involutorisches.

Auf diese Unterschiede gegen die Möbius'sche Ausdrucksweise musste aufmerksam gemacht werden, obwohl sie wenig Bedeutung haben. Sie entspringen aus dem hier auftretenden Umklappen der einen Ebene um eine gewisse Gerade. Die Lage der letzteren ergiebt sich aus den sich *selbstentsprechenden Punkten*, die hier auftreten.

Um die letzteren für die Abbildung $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ zu finden, wo sie übrigens von geringerer Bedeutung sind, bestimme man z aus der Gleichung $z = \frac{az+b}{cz+d}$. Man findet *zwei* sich selbstentsprechende Punkte

$$z = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}.$$

Für die involutorische Verwandtschaft $Z = \frac{az+b}{cz-a}$ geht dies über in

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2+bc}}{c}.$$

Um die Verbindungslinie dieser beiden Punkte geschieht dann das Umklappen. Das Inversionscentrum muss im Halbirungspunkte der Verbindungslinie von z_1 und z_2 liegen, und in der That ist

$$\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{a}{c}$$

das obige Inversionscentrum. Da ferner ein Punkt mit der Abweichung α gegen das Inversionscentrum in einen Punkt mit der Abweichung $-\alpha+\beta$ überging, so ist das arithmetische Mittel dieser beiden Abweichungen, also $\frac{\beta}{2}$, d. h. die Abweichung von $\sqrt{\frac{bc+a^2}{c^2}}$ die Richtung der Geraden, um welche das Umklappen erfolgt. Die Analogie mit der Abbildung $Z=\frac{1}{z}$ ist also eine vollständige. Bei Möbius hingegen giebt es aus einem einfachen Grunde unendlich viele selbstentsprechende Punkte.

Eine specielle *involutorische* Abbildung ist die durch die noch mehrfach zu erwähnende Function

$$Z=\frac{z+1}{z-1}=1+\frac{2}{z-1}$$

vermittelte. Der Inversionskreis ist der mit dem Radius $\sqrt{2}$ um den Punkt $+1$ geschlagene. Zur Inversion tritt noch das Umklappen um die reelle Axe, denn die sich selbstentsprechenden Punkte $1\pm\sqrt{2}$ liegen auf derselben. Der Einheitskreis geht in die imaginäre Axe über, so dass sein Inneres conform auf eine Halbebene übertragen wird. Sich selbst entsprechende Kreise sind diejenigen, die den Inversionskreis orthogonal schneiden und ihre Centra auf der reellen Axe haben.

§ 30. Einige andere Fälle nebst Anwendungen.

Aehnlich, wie mit dem letztgenannten Beispiele, verhält es sich mit den *nicht* involutorischen Abbildungen

$$Z=\frac{z-1}{z+1},\quad Z=\frac{z-i}{z+i},\quad Z=\frac{z+i}{z-i},$$

bei denen die Inversionscentra der Reihe nach -1, $-i$ und $+i$ und die Inversionsradien gleich $\sqrt{2}$ sind. Zur Inversion und dem Umklappen treten noch Drehungen von je 180^0, -90^0 und $+90^0$. Bei sämmtlichen geht der Einheitskreis in die imaginäre Axe über, sein Inneres wird conform auf eine Halbebene übertragen.

Gerade solche Abbildungen sind von besonderer Wichtigkeit. Nach § 4 geschieht mit Hülfe der Abbildung $Z=z^2$ die Uebertragung der Halbebene auf eine Ebene, folglich geschieht durch gewisse Abbildungen wie z. B. $Z=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ die conforme Darstellung des Inneren des Einheitskreises auf der ganzen Ebene, durch Umkehrung dieser Function die der ganzen Ebene auf dem Innern des Einheitskreises. Da ferner durch stereographische Projection die Kugelfläche auf die ganze Ebene conform übertragen

wird, so kann man z. B. mittels obiger Abbildung Karten construiren, bei denen die gesammte Erdoberfläche conform innerhalb eines einzigen Kreises dargestellt ist. Eine solche Darstellung hat schon Lambert in seinem mehrfach erwähnten Werke gegeben.

Mit Hülfe der Abbildung $Z = \sqrt{z}$ hingegen kann man die Halbebene auf den Raum eines rechten Winkels, mit Hülfe von $Z = \sqrt[n]{z}$ auf den Winkel $\frac{\pi}{n}$ übertragen (vergl. § 5), so dass durch $Z = \sqrt[n]{\frac{z+1}{z-1}}$ das Innere des Einheitskreises auch auf einen Winkelraum $\frac{\pi}{n}$ conform übertragen werden kann.

Kartographisch sind solche Darstellungen von geringerem practischen Interesse, sie bieten aber sehr instructive Uebungsbeispiele und leichte Anwendungen auf gewisse Probleme der Physik.

Auch die von zwei sich schneidenden Kreisen gebildeten *„Sichelräume"* können auf Winkelraum, Ebene und Kreis conform abgebildet werden. Man hat nur nöthig, mittels einer Function von der Form $\frac{az+b}{cz+d}$ so zu transformiren, dass das Abbildungscentrum in einen der Durchschnittspunkte fällt. Dies geschieht dadurch, dass man $\frac{a}{c}$ oder $-\frac{d}{c}$ gleich dem durch einen solchen Punkt repräsentirten Werthe setzt. Dann gehen die Kreise in Gerade, die Sichelräume in Winkel über, die mit Hülfe der oben besprochenen Operation auf ganze Ebenen, Kreise u. dgl. übertragen werden können.

Jede Abbildung mittels einer Function von der Form $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ kann durch eine *stereometrische Operation* ersetzt werden. Durch die Umkehrung der stereographischen Projection wird nämlich die Ebene conform auf die Oberfläche der Kugel übertragen. Auf letzterer mache man dann einen beliebigen Punkt zum Centrum der stereographischen Projection auf die gegenüberliegende Tangentialebene. Die Conformität und Kreisverwandtschaft zwischen beiden Ebenen sind dann ohne Weiteres klar gelegt.

Eine Reihe von Eigenschaften der stereographischen Projection und der Kreisverwandtschaft treten also in unmittelbaren Zusammenhang. Besonders Sätze über Kreisbüschel auf der Kugel, über ihre orthogonalen Kreisschaaren und isogonalen Trajectorien, die im speciellen Falle *loxodromische Linien* sind, lassen sich direct aus den entsprechenden Sätzen über Kreisbüschel, Kreisschaaren und logarithmischen Spiralen und Doppelspiralen ableiten.

Die obige Abbildung der Kreissichel ist unter Anderem bei Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik I, S. 288, be-

handelt und S. 294 auf ein Problem der Hydrodynamik angewandt worden.

Die Abbildung $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ ist durch Hrn. H. A. Schwarz im 70. Bande des Crelle'schen Journals mit schwierigeren Problemen combinirt zu wichtiger Anwendung gekommen.

§ 31. Einige fundamentale Aufgaben.

In $$Z = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{z+\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}z+\frac{d}{a}} = \frac{z+\xi}{\eta z+\zeta}$$

hat man drei Constante ξ, η, ζ zur Verfügung. Daraus folgt, dass eine Kreisverwandtschaft zwischen zwei Ebenen — in unserem Sinne — vollständig bestimmt ist, *wenn zu drei beliebigen Punkten der einen willkürlich drei entsprechende der andern festgesetzt werden.* Durch jede dieser Punktgruppen ist ein Kreis bestimmt. Liegen die beiden Punktgruppen gleichstimmig auf den Peripherien der Kreise, d. h. werden beide in gleichem Sinne durchlaufen, so entsprechen sich Inneres und Inneres, Aeusseres und Aeusseres; ist das Gegentheil der Fall, so entspricht das Innere des einen dem Aeusseren des andern. [Bei Möbius ist es ein wenig anders, da dort eine Inversion ohne Umklappen zulässig ist, so dass, wenn je drei sich entsprechende Punkte beider Ebenen bestimmt sind, erst noch *festgesetzt werden muss*, ob sich Inneres und Inneres, oder Inneres und Aeusseres entsprechen sollen. Bei uns hingegen liegen Original und Abbildung stets auf demselben „Ufer" der Umgrenzung.]

Die erste Fundamentalaufgabe ist nun folgende: *Die wirkliche Gestalt der abbildenden Function*

$$Z = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{z+\xi}{\eta z+\zeta}$$

zu bestimmen, wenn die willkürlich gegebenen Punkte z_1, z_2, z_3 der z-Ebene den willkürlichen Punkten Z_1, Z_2, Z_3 der Z-Ebene entsprechen sollen.

Man hat nur nöthig, die Constanten ξ, η und ζ aus den drei Gleichungen

$$Z_1 = \frac{z_1+\xi}{\eta z_1+\zeta}, \quad Z_2 = \frac{z_2+\xi}{\eta z_2+\zeta}, \quad Z_3 = \frac{z_3+\xi}{\eta z_3+\zeta}$$

zu bestimmen und ihre Werthe in $Z = \frac{z+\xi}{\eta z+\zeta}$ einzusetzen.

In vielen Fällen kann man die Rechnung ersparen. Sollen z. B. die Punkte ∞, 0 und c der z-Ebene bezüglich den Punkten a, b, ∞ der Z-Ebene entsprechen, so weiss man sofort, dass der

Nenner die Gestalt $z - c$, der Quotient der Factoren, die z oben und unten hat, gleich a (man denke an $z = \infty$), der der Glieder ohne z gleich b sein muss (man denke an $z = 0$). So folgt sofort als abbildende Function $Z = \frac{az - bc}{z - c}$, deren Richtigkeit man leicht erproben kann.

Sollen sich ferner entsprechen ∞, 0 und d in der z-Ebene und a, b und 0 in der Z-Ebene, so ergiebt sich in ähnlicher Weise

$$Z = \frac{az - ad}{z - \frac{ad}{b}} = ab\,\frac{z - d}{bz - ad}.$$

In gewissen Specialfällen erhält man die Verwandtschaften der *Congruenz* und der *Aehnlichkeit*, z. B. wenn die drei Punkte beider Ebenen sich decken, oder wenn die unendlichen Punkte einander entsprechen sollen.

Eine zweite Fundamentalaufgabe ist folgende: *In der einen Ebene ist ein Kreis, ein Punkt z_1 seiner Peripherie und ein Punkt z_2 in seinem Inneren gegeben, in der andern Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkte Z_2 und einem Peripheriepunkte Z_1. Beide Ebenen sollen so aufeinander abgebildet werden, dass die genannten Stücke einander entsprechen. Wie heisst die abbildende Function?*

Man lege durch z_2 einen Durchmesser und bestimme auf ihm mit Hülfe der Polare oder des vollständigen Vierseits oder der Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ den zugeordneten harmonischen Punkt z_3. Das Kreisbüschel durch z_1 und z_3 schneidet den gegebenen Kreis rechtwinklig. Wählt man also z_3 zum Inversionscentrum, so wird das Kreisbüschel in ein Strahlenbüschel verwandelt, d. h. z_3 fällt ins Unendliche, und der gegebene Kreis wird ein Orthogonalkreis, d. h. z_1 fällt in sein Centrum. Daraus schliesst man, dass die Aufgabe sich auf die vorige reduciren lässt, indem sich z_1, z_2, z_3 und Z_1, Z_2 und ∞ entsprechen sollen. Die Function erhält zunächst wegen z_3 und ∞ die Gestalt

$$Z = \frac{az + b}{z - z_3},$$

und a und b sind noch aus den Gleichungen

$$Z_1 = \frac{az_1 + b}{z_1 - z_3} \quad \text{und} \quad Z_2 = \frac{az_2 + b}{z_2 - z_3}$$

zu bestimmen, womit die Aufgabe gelöst ist, da z_3 als bekannt angesehen werden darf.

Soll z_1 nicht dem Centrum des zweiten Kreises, sondern dem unendlichen Punkte entsprechen, wobei jedoch das Innere aufs

Aeussere abgebildet wird, so ist an das Obige im Wesentlichen nur noch eine Inversion und Drehung anzuschliessen.

In gewissen Fällen giebt es interessante graphische Lösungen. Sind z. B. in der einen Ebene drei Punkte z_1, z_2, z_3 gegeben, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden, in der andern drei beliebige Punkte Z_1, Z_2, Z_3, so giebt der symmetrische Durchmesser des Kreises durch z_1 z_2 z_3 noch einen vierten Punkt z_4 auf der Peripherie, und zu den Punkten Z_1, Z_2, Z_3 kann man sofort nach der Methode des harmonischen Kreisvierecks (§ 22) einen vierten Z_4 bestimmen.

§ 32. Analytische Behandlung der involutorischen Abbildung $Z = \frac{z+1}{z-1}$.

Aus der Gleichung

$$1) \qquad X + Yi = \frac{x+yi+1}{x+yi-1}$$

folgt

$$2) \qquad X - Yi = \frac{x-yi+1}{x-yi-1}.$$

Dass dies der Fall ist, ergiebt sich folgendermassen:

$$X + Yi = \frac{x+yi+1}{x+yi-1} \cdot \frac{x-yi-1}{x-yi-1} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\,\frac{2y}{(x-1)^2+y^2},$$

folglich

$$X - Yi = \frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x-1)^2+y^2} = \frac{(x-yi+1)(x+yi-1)}{(x+yi-1)(x-yi-1)} = \frac{x-yi+1}{x-yi-1}.$$

Multiplication der Gleichungen 1) und 2) giebt

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2} = \frac{p^2}{q^2},$$

wo R von Null, p von -1 und q von $+1$ ausgeht, oder

$$3) \qquad R = \frac{p}{q}.$$

Der concentrischen Kreisschaar $R = c$ um den Nullpunkt der Z-Ebene entspricht also die Kreisschaar $\frac{p}{q} = c$ der z-Ebene, deren Radii vectores von -1 und $+1$ ausgehen.

Wegen des involutorischen Charakters kann man hierbei Z-Ebene und z-Ebene vertauschen.

Division der Gleichungen 1) und 2), Logarithmirung und Hinzufügung des Factors $\frac{1}{2i}$ giebt

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi}{X-Yi}=\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi+1}{x-yi+1}-\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-1}{x-yi-1},$$

oder unter Anwendung der mehrfach gebrauchten Formel:

$$\arctan\frac{Y}{X}=\arctan\frac{y}{x+1}-\arctan\frac{y}{x-1},$$

oder endlich

$$4)\qquad \Theta=\varphi-\chi,$$

wo Θ, φ und χ die Neigungswinkel der Radii vectores R, p und q sind. *Den Geraden $\Theta=\gamma$ durch den Nullpunkt der Z- oder z-Ebene entspricht das Kreisbüschel $\varphi-\chi=\gamma$ durch die Punkte -1 und $+1$ der z resp. Z-Ebene.*

Fig. 12 ist nur bezüglich des Nullpunktes beider Ebenen zu modificiren, um diesen Zusammenhang darzustellen. In beiden Ebenen entsprechen sich schliesslich folgende Curven:

$$5)\qquad \begin{cases} f(R,\ \Theta)=0 & \text{und}\quad f\left(\frac{p}{q},\ \varphi-\chi\right)=0,\\ f\left(\frac{P}{Q},\ \Phi-X\right)=0 & \text{und}\quad f(r,\ \vartheta)=0, \end{cases}$$

wo die Radii vectores von den genannten Punkten ausgehen.

In ganz ähnlicher Weise ist zu untersuchen, was dem Kreise um einen beliebigen Punkt $a+bi$ entspricht. Man geht aus von

$$Z-(a+bi)=\frac{z+1}{z-1}-(a+bi)=(1-a-bi)\cdot\frac{z+\frac{1+a+bi}{1-a-bi}}{z-1},$$

setzt hier $Z=X+Yi$, $z=x+yi$, und stellt die conjugirte Gleichung auf. Multiplication beider giebt dann

$$(X-a)^2+(Y-b)^2=$$
$$[(1-a)^2+b^2]\cdot\frac{\left(x-\frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2}\right)^2+\left(y-\frac{2b}{(a-1)^2+b^2}\right)^2}{(x-1)^2+y^2},$$

also

$$6)\qquad R=\frac{p}{q}\sqrt{(1-a)^2+b^2}=\frac{p}{q}\cdot\varrho_1,$$

wo R von $a+bi$, p von $\frac{a+bi+1}{a+bi-1}$ und q von $+1$ ausgeht, und ϱ_1 die Entfernung von $+1$ nach $a+bi$ ist.

Nur der sehr leichte Fall, wo $(1-a)^2+b^2=0$ ist, verlangt eine etwas andere Behandlung. Dann ist $a+bi=1$, es handelt sich also um das bleibende Strahlenbüschel durch $+1$.

In gleicher Weise führt die Division beider Gleichungen, nebst Logarithmirung und Zusetzung des Factors $\frac{1}{2i}$ auf

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi-(a+bi)}{X-Yi-(a-bi)}=\frac{1}{2i}\lg\frac{1-a-bi}{1-a+bi}$$

$$+\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-\frac{a^2+b^2-1-2bi}{(a-1)^2+b^2}}{x-yi-\frac{a^2+b^2-1+2bi}{(a-1)^2+b^2}}-\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-1}{x-yi-1},$$

oder

$$\arctan\frac{Y-b}{X-a}=\arctan\frac{b}{a-1}+\arctan\frac{y+\frac{2b}{(a-1)^2+b^2}}{x-\frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2}}-\arctan\frac{y}{x-1},$$

oder

7) $$\Phi=\alpha+\varphi-\chi,$$

wo die Winkel die Neigungen der obigen Radii vectores und der Constanten ϱ_1 darstellen.

Demnach entsprechen sich die Curven

$R=c$ um $a+bi$ und die Kreisschaaren $\frac{p}{q}\sqrt{(1-a)^2+b^2}$,

$\Phi=\gamma$ durch $a+bi$ und die Kreisbüschel $\varphi-\chi+\alpha=\gamma$ durch $\frac{a+bi+1}{a+bi-1}$ und $+1$,

und endlich

8) $$f(R,\Phi)=0 \text{ und } f\left[\frac{p}{q}\sqrt{(1-a)^2+b^2},(\varphi-\chi+\alpha)\right]=0,$$

wo die Variabelen die genannte Bedeutung haben und ausserdem beide Ebenen vertauscht werden können.

So z. B. entsprechen sich die *logarithmischen Spiralen*

$$R=c.k^{\Theta}$$

mit dem Nullpunkte als Centrum und die *logarithmischen Doppelspiralen* $\frac{p}{q}=ck^{\varphi-\chi}$ mit den Grundpunkten ± 1; ferner die *confocalen Ellipsen und Hyperbeln* $P\pm Q=c$ und die Curven $\frac{1}{p}\pm\frac{2r}{q}=c$ (wo r von 0, p von $+1$ und q von -1 ausgeht), also eine bestimmte Art *Pascalscher Schneckenlinien* (limaçons); ebenso gehen die *Parabeln* mit dem Brennpunkte $+1$ in *Pascalsche Schneckenlinien* über, zu denen in speciellen Fällen auch Cardioiden gehören. Die Kreisschaar $\frac{P}{Q}=c$ um die Punkte $a+bi$ und a_1+b_1i nebst dem orthogonalen Kreisbüschel $\Phi-X=\gamma$ durch diese Punkte verwandeln sich in die Kreisschaar

$$\frac{\frac{p}{q}\sqrt{(1-a)^2+b^2}}{\frac{p_1}{q}\sqrt{(1-a_1)^2+b_1^2}}=c \quad\text{oder}\quad \frac{p}{p_1}\sqrt{\frac{(1-a)^2+b^2}{(1-a_1)^2+b_1^2}}=c,$$

und das Kreisbüschel

$(\varphi - \chi + \alpha) - (\varphi_1 - \chi + \alpha_1) = \gamma$ oder $(\varphi - \varphi_1) + (\alpha - \alpha_1) = \gamma$ durch die Punkte $\frac{a+bi+1}{a+bi-1}$ und $\frac{a_1+b_1i+1}{a_1+b_1i-1}$.

Die Uebertragung von Sätzen der gewöhnlichen Geometrie der einen Ebene in solche der anderen, z. B. über die Kreisreihen, die Doppelverhältnisse und Doppelwinkel, geschieht ganz in der im vorigen Capitel dargelegten Weise. Namentlich lassen sich gewisse Eigenschaften höherer Curven leicht aus denen der niederen ableiten. Beispielshalber sei bemerkt, dass Krümmungskreise stets in Krümmungskreise übergehen. Liegt also der Inversionspunkt auf einem Krümmungskreise, so wird dieser eine Gerade und die Curve erhält im Berührungspunkte derselben eine Berührung höherer Ordnung, ev. einen Wendepunkt.

§ 33. Dieselbe Aufgabe für den allgemeinen Fall

$$Z = \frac{(a+bi)z + (c+di)}{(e+fi)z + (h+ki)}.$$

Um analytisch festzustellen, was den Kreisen um den Nullpunkt der Z-Ebene entspricht, gehe man aus von der Gleichung

$$X + Yi = \frac{(a+bi)(x+yi) + (c+di)}{(e+fi)(x+yi) + (h+ki)},$$

bilde die conjugirte Gleichung und multiplicire beide Seiten mit einander, wodurch man erhält

$$X^2 + Y^2 = \frac{a^2+b^2}{e^2+f^2} \cdot \frac{\left(x + \frac{ac+bd}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(y + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)^2}{\left(x + \frac{eh+fk}{e^2+f^2}\right)^2 + \left(y + \frac{ek-fh}{e^2+f^2}\right)^2} = \frac{a^2+b^2}{e^2+f^2} \cdot \frac{p^2}{q^2},$$

oder

1) $$R = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{e^2+f^2}},$$

wo p von $-\frac{ac+bd}{a^2+b^2} - i\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$ ausgeht, q von $-\frac{eh+fk}{e^2+f^2} - i\frac{ek-fh}{e^2+f^2}$.

Ebenso führt Division und Logarithmirung beider Gleichungen nebst Zusetzung des Factors $\frac{1}{2i}$ auf die Gleichung

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi}{X-Yi} = \frac{1}{2i}\lg\frac{a+bi}{a-bi} - \frac{1}{2i}\lg\frac{e+fi}{e-fi} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\left(x+\frac{ac+bd}{a^2+b^2}\right)+i\left(y+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)}{\left(x+\frac{ac+bd}{a^2+b^2}\right)-i\left(y+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)}$$
$$- \frac{1}{2i}\lg\frac{\left(x+\frac{eh+fk}{e^2+f^2}\right)+i\left(y+\frac{ek-fh}{e^2+f^2}\right)}{\left(x+\frac{eh+fk}{e^2+f^2}\right)-i\left(y+\frac{ek-fh}{e^2+f^2}\right)},$$

oder, da jedes Glied ein Arcus tangens ist, auf die Gleichung

2) $$\Phi = \alpha - \beta + \varphi - \chi,$$

wo Φ, φ und χ die Neigungswinkel der obigen Radii vectores, α die Abweichung des Punktes $a + bi$, β die des Punktes $e + fi$ bedeuten.

Um den Kreis um den Punkt $l + mi$ der Z-Ebene zu behandeln, füge man der Anfangs-Gleichung dieses Abschnitts rechts und links noch $-(l + mi)$ zu und behandele sie unter geeigneter Anordnung des Reellen und Imaginären in derselben Weise, wodurch man auf das analoge Resultat gelangt. Geometrisch Neues ergiebt sich nicht, so dass die Rechnung nur den Werth eines Uebungsbeispiels hat. Die Theorie dieser Abbildung ist demnach als abgeschlossen zu betrachten.

Zur Litteratur vergleiche man die Angaben des vorigen Capitels.

Fünftes Capitel.

Allgemeines über die Functionen complexen Arguments und die conforme Abbildung.

§ 34. Welchen Bedingungsgleichungen genügt jede Function complexen Arguments?*)

Jede Function von x und yi heisst eine complexe Function. Uns interessiren hier nur diejenigen Functionen, welche die beiden Variabelen nur in der Verbindung $(x + yi)$ enthalten, die also zweckmässig als *Functionen des complexen Arguments* $(x + yi)$ bezeichnet werden.

Sobald $w = u + vi$ eine Function des complexen Arguments $z = x + yi$ ist, genügt es gewissen Differentialgleichungen. Differentiirt man nämlich partiell nach x, so muss, da x nur insofern in w enthalten ist, als es in z vorkommt,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

sein, woraus, da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (x + yi)}{\partial x} = 1$$

ist, folgt:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}.$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial (x + yi)}{\partial y} = i \frac{dw}{dz}.$$

*) § 34 und 35 schliessen sich mehrfach eng an § 5 der Functionentheorie von Durège an. Auch vergleiche man die Anfangsparagraphen von Riemann's Dissertation.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt endlich die Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

der jede Function complexen Arguments genügen muss.

Es fragt sich nun, ob umgekehrt jede Function von x und y, welche dieser Gleichung genügt, eine solche complexen Arguments ist. Angenommen, es sei

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x}$$

und w zunächst nur Function von x und y, dann ist das vollständige Differential

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

Ersetzt man hier, der Voraussetzung gemäss, $\frac{\partial w}{\partial y}$ durch $i \frac{\partial w}{\partial x}$, so hat man

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + i \frac{\partial w}{\partial x} dy = \frac{\partial w}{\partial x} (dx + i dy) = \frac{\partial w}{\partial x} d(x + yi) = \frac{\partial w}{\partial x} dz.$$

Aus $z = x + yi$ folgt $x = z - yi$, dies setze man in w ein, so dass es eine Function von y und z wird, die mit w_1 bezeichnet werden mag. Das vollständige Differential derselben ist dann

$$dw_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} dy + \frac{\partial w_1}{\partial z} dz.$$

Durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen erhält man

$$dw - dw_1 = \frac{\partial w}{\partial x} dz - \frac{\partial w_1}{\partial y} dy - \frac{\partial w_1}{\partial z} dz.$$

Hier ist die linke Seite offenbar gleich Null, so dass man hat

$$dz \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial z} \right] = dy \frac{\partial w_1}{\partial y}.$$

Nun sind aber dz und dy willkürliche Differentiale, und zwar dy reell, dz hingegen complex, also mit ganz beliebiger Abweichung. Die letzte Gleichung kann also nur bestehen, wenn die Factoren beider Differentiale gleich Null sind. Demnach ist

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass w_1, woraus x entfernt war, auch y nicht mehr enthält, also nur Function von z ist, so dass y nur insofern in w vorkommen konnte, als es in z enthalten war. Statt $\frac{\partial w_1}{\partial z}$ kann man also jetzt schreiben $\frac{dw}{dz}$, und geschieht dies in der letzten der beiden Schlussgleichungen, so folgt $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$, d. h.

auch x kommt in w nur insofern vor, als es in z enthalten ist. *Das Bestehen der Differentialgleichung* 1) *ist also nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass w Function des complexen Arguments $z = x + yi$* ist.

Man könnte demnach die Function complexen Arguments durch diese Differentialgleichung definiren.

Beispiel: Ist $w = x^2 - y^2 + 2xyi$ eine Function complexen Arguments?

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2yi, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -2y + 2xi = i(2x + 2yi),$$

also
$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Die Frage ist demnach zu bejahen. In der That ist $w = (x + yi)^2$. Die entsprechende Probe würde zeigen, dass z. B.

$$w = x^2 + y^2, \quad w = x^2 - y^2, \quad w = x - yi$$

keine Functionen von $x + yi$ sind.

Die Function w des complexen Arguments $x + yi$ genügt noch einer anderen Differentialgleichung.

Aus der obigen Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{dw}{dz}.$$

Durch nochmaliges Differentiiren folgt also unter Berücksichtigung der sonstigen Bemerkungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d\,\frac{dw}{dz}}{dz}\,\frac{\partial(x+yi)}{\partial x} = \frac{d^2w}{dz^2},$$

ebenso
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = i\,\frac{d\,\frac{dw}{dz}}{dz}\,\frac{\partial(x+yi)}{\partial y} = -\frac{d^2w}{dz^2}.$$

Durch Addition erhält man schliesslich

2)
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Beispiel: Ist $w = (x + yi)^3$, so folgt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6(x + yi), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -6(x + yi),$$

also
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Es wird sich im folgenden Abschnitt zeigen, dass der reelle Theil für sich und ebenso der imaginäre derselben Differentialgleichung genügt.

§ 35. Differentialgleichungen, denen der reelle und der imaginäre Theil der Function complexen Arguments für sich genügen.

Es handle sich wieder um die Function w des complexen Arguments $x + yi$. Man denke sich das Reelle vom Imaginären getrennt, so dass z. B. $w = u + vi$ ist, wo u und v reelle Functionen von x und y sind. Statt der Gleichung 1) im vorigen Abschnitt kann man dann schreiben

$$\frac{\partial(u+vi)}{\partial y} = i\,\frac{\partial(u+vi)}{\partial x},$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} = i\,\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial vi}{\partial x} = i\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Gleichsetzung der reellen und imaginären Theile giebt

3) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

4) $$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Diesen Bedingungsgleichungen genügen also der reelle und der imaginäre Theil einer Function complexen Arguments.

Da man aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen 3) und 4) leicht auf das der Gleichung 1) schliessen kann, so folgt, *dass, wenn u und v den Differentialgleichungen* 3) *und* 4) *genügen, $u + vi$ eine Function complexen Arguments ist.*

Partielle Differentiation der Gleichung 3) nach x giebt ferner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}{\partial x},$$

durch Differentiation der Gleichung 4) nach y entsteht ebenso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}{\partial y} = -\frac{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}{\partial x},$$

folglich ist

5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Differentiirt man endlich Gleichung 3) nach y, Gleichung 4) nach x, so giebt die Addition der neuen Gleichungen

6) $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ist demnach $u + vi$ eine Function des complexen Arguments $x + yi$,

so genügt sowohl der reelle Theil u, als auch der imaginäre Theil v der genannten partiellen Differentialgleichung).*

Beispiel: In

$$w = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = u + vi$$

ist $u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3.$

Hier ist $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x.$

Addition beider Ausdrücke giebt also Null.

Ebenso ist $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y$, also auch hier die Summe gleich Null. Dass auch die Gleichungen 3) und 4) erfüllt sind, ergiebt sich sofort.

§ 36. Ist der reelle Theil einer Function complexen Arguments gegeben, so kann man den imaginären Theil bestimmen.

Aus den gefundenen Beziehungen ergiebt sich folgende Eigenthümlichkeit: Daraus, dass u eine reelle Function von x und y ist, die der Gleichung 5) genügt, v eine ebensolche Function, die der Gleichung 6) genügt, folgt durchaus nicht, dass $u + vi$ eine Function des complexen Arguments $x + yi$ sei. *Ist vielmehr ein so beschaffenes u gegeben, so lässt sich mit Hülfe der Gleichungen* 3) *und* 4) *eine reelle Function v so bestimmen, dass u + vi eine Function complexen Arguments wird***). Diese Bestimmung soll an einigen Beispielen durchgeführt werden.

a) Man überzeugt sich leicht, dass die Function $u = x^3 - 3xy^2$ der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt. Hier ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,$$

also nach Gleichung 3)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{und} \quad v_1 = \int (3x^2 - 3y^2)\,dy = 3x^2y - y^3,$$

wozu noch eine willkürliche Function von x treten könnte, die

*) Cauchy nennt $u + vi$, wenn u und v den obigen Bedingungen genügen, eine *monogene Function* von $x + yi$. Der Name ist deshalb gewählt, weil eine solche Function, wie in § 37 gezeigt wird, in jedem Punkte jedes Blattes nur *einen* Differentialquotienten hat, nach welcher Richtung sich auch das Argument ändern mag. Vgl. Exercices d'analyse et de physique mathématique. IV. pag. 346.

**) Jede reelle Function u, welche der Gl. $\Delta u = 0$ genügt, lässt sich also als reeller oder imaginärer Theil einer Function complexen Arguments betrachten. Hierin liegt die Umkehrung des vorigen Satzes.

nach y constant ist. Ferner ist $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, also nach Gleichung 4) $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$, demnach $v_2 = \int 6xy\,dx = 3x^2y$, wozu noch eine willkürliche Function von y treten könnte, die nach x constant ist. Diese letztere ergiebt sich aus dem Werthe von v_1 als $-y^3$, während die bei v_1 erwähnte willkürliche Function von x, weil sie in v_2 nicht auftritt, wegzulassen ist. Die Vergleichung von v_1 und v_2 ergiebt also, dass die gesuchte Function

$$v = 3x^2y - y^3$$

ist. Die zu $u = x^3 - 3xy^2$ gehörige Function complexen Arguments ist also

$$u + vi = 3x^2y - y^3 + i\,(3x^2y - y^3) = (x + yi)^3,$$

der übrigens noch eine willkürliche Constante beigefügt werden kann.

b) Als zweites Beispiel sei gegeben

$$u = \lg \sqrt{x^2 + y^2} = \tfrac{1}{2} \lg (x^2 + y^2),$$

eine Function, die, wie wir bereits wissen, der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt. Hier ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, also nach Gleichung 3) auch $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, folglich $v_1 = \int \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \arctan \frac{y}{x}$. Ferner ist $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$, also nach Gl. 4) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ und

$$v_2 = -\int \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx = -\arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{y}{x} - \frac{\pi}{2},$$

so dass sich in diesem Falle v_1 und v_2 nur um eine Constante unterscheiden, deren Zufügung gleichgültig ist. Demnach ist

$$v = \arctan \frac{y}{x},$$

also $$u + vi = \lg \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x}.$$

Um dies als Function complexen Arguments zu schreiben, bedenke man, dass

$$u = \lg \sqrt{x^2 + y^2} = \lg \sqrt{(x + yi)(x - yi)} = \tfrac{1}{2}\Big[\lg (x + yi) + \lg (x - yi)\Big],$$

und

$$vi = i \arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \lg \frac{x + yi}{x - yi} = \frac{1}{2}\Big[\lg (x + yi) - \lg (x - yi)\Big]$$

ist, woraus durch Addition folgt $u + vi = \lg (x + yi)$.

Allgemein wäre die Bestimmung von v aus gegebenem u folgendermassen zu formuliren: Das vollständige Differential der gesuchten Function ist

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy,$$

oder, nach den Gleichungen 3) und 4)

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

also

$$v = -\int \frac{\partial u}{\partial x}dx + \int \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Wir gehen jetzt hierauf nicht näher ein, da dieser Punkt gewisse functionentheoretische Kenntnisse voraussetzt, die mit dem Begriff des Integrals complexer Functionen zusammenhängen*). Die Andeutungen dieses Abschnitts hatten nur den Zweck, die Wichtigkeit der obigen Differentialgleichungen darzuthun und auf einen gewissen Zusammenhang mit Problemen der mathematischen Physik vorzubereiten, bei denen es darauf ankommt, eine reelle Function u, die der Gleichung $\triangle u = 0$ genügt, aus vorgeschriebenen Bedingungen zu bestimmen. Nach Obigem kann man statt dieser reellen Function die Function complexen Arguments $u + vi$ bestimmen, wodurch das Problem in der Regel vereinfacht wird.

§ 37. Der Werth des Differentialquotienten einer Function complexen Arguments ist unabhängig von der Richtung, in der das Argument sich ändert.

Es sei $w = u + vi = f(z) = f(x + yi)$, also

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

und das vollständige Differential

$$dw = d(u + vi) = du + idv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

und endlich der Differentialquotient

$$7) \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{d(u+vi)}{d(x+yi)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy}{dx + idy}.$$

Wäre nun w nicht Function von $(x + yi)$, sondern nur von x und yi, fänden also nicht die Beziehungen 3) und 4) statt, so würde $\frac{dw}{dz}$ von dz, d. h. von der Art der Aenderung, speciell von der Richtung derselben, abhängig sein, denn dx und dy, folglich auch $\frac{dy}{dx}$, sind vollständig willkürlich, und der obige Ausdruck ist

*) Vgl. hierzu Lipschitz: Lehrbuch der Analysis, II, § 125.

von $\frac{dy}{dx}$ abhängig, was man sofort erkennt, wenn oben und unten durch dx dividirt wird, wodurch er sich in

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

verwandelt. Ist aber w Function von $x + yi$, so kann man nach 3) und 4) $\frac{\partial v}{\partial y}$ durch $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ durch $-\frac{\partial v}{\partial x}$ ersetzen. Hierdurch erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right) + i\frac{\partial v}{\partial x}\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Welches dy man also auch mit dx combinirt, stets erhält der Differentialquotient denselben Werth, als wenn man x allein ändert, d. h. *der Differentialquotient ist unabhängig von der Richtung, in der das Argument z sich ändert.*

Die Function complexen Arguments hat demnach im Allgemeinen an jeder Stelle jedes Blattes $x + yi$ einen und *nur einen* bestimmten Differentialquotienten, während bei der lediglich complexen Function diese Bestimmtheit nicht stattfindet.

Es fragt sich nun, ob umgekehrt eine Function $u + vi$ von x und yi stets eine solche von $(x + yi)$ ist, sobald der Differentialquotient unabhängig von der Art der Aenderung des Arguments ist. Soll der Ausdruck 7) unabhängig von $dz = dx + idy$ sein, so muss es z. B. gleichgültig sein, ob man dx oder dy gleich Null setzt. Setzt man $dy = 0$, so reducirt er sich auf

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

setzt man $dx = 0$, so entsteht

$$\frac{dw}{dz} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

und sollen diese beiden Ausdrücke, wie verlangt war, gleich sein, so muss $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und zugleich $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sein. Aus den letzteren

Gleichungen folgt aber, dass $u + vi$ eine Function des complexen Arguments ist.

Der Umstand also, dass der Differentialquotient einer Function $w = u + vi$ von x und yi unabhängig vom Werthe des Differentials dz ist, enthält die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass w eine Function des complexen Arguments $x + yi$ sei.

Riemann gab daher die Definition der Function complexen Arguments, ganz unabhängig davon, ob ein mathematischer Ausdruck für dieselbe vorliegt oder nicht, folgendermassen*):

„Eine veränderliche complexe Grösse w heisst eine Function einer anderen complexen Grösse z, wenn sie sich mit ihr so ändert, dass der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werthe des Differentials dz ist."

Beiläufig sei bemerkt, wie sich hieraus folgern lässt, dass, wenn Z eine Function des complexen Arguments ist, auch z eine Function des complexen Arguments Z ist.

§ 38. Weiteres über den Differentialquotienten.

Nach Obigem war

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

wofür man nach den Gleichungen 3) und 4) auch schreiben kann

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \text{ oder } \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ oder endlich } \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Der absolute Betrag des Differentialquotienten kann also nicht nur in der Form

9) $$\varrho = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2},$$

sondern auch als

$$\varrho = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

u. s. w. geschrieben werden. Seine Abweichung hingegen ist zu bestimmen aus

10) $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}}, \text{ oder } \cos\varphi = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}},$$

wofür nach den Gleichungen 3) und 4) gleichfalls andere Werthe geschrieben werden können.

*) Riemann: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen, complexen Grösse. Göttingen, 1867, Seite 2.

Endlich lässt sich, wie schon bemerkt, noch zeigen, dass der Differentialquotient einer Function complexen Arguments gleichfalls eine Function complexen Arguments ist. Nach den Gleichungen 8) und 1) ist nämlich

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y},$$

also

$$\frac{\partial\left(\frac{dw}{dz}\right)}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}{\partial x}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial\left(\frac{dw}{dz}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial y},$$

folglich

$$\frac{\partial\left(\frac{dw}{dz}\right)}{\partial y} = i\frac{\partial\left(\frac{dw}{dz}\right)}{\partial x}.$$

Der Differentialquotient genügt also der Gleichung 1) und ist folglich eine Function complexen Arguments.

§ 39. Die conforme Abbildung.

Die z-Ebene und Z-Ebene mögen durch die Function complexen Arguments $Z = f(z)$ oder $X + Yi = f(x + yi)$ auf einander bezogen werden, so dass jedem Punkte A oder $x + yi$ der einen ein Punkt A (eventuell mehrere Punkte) der Z-Ebene entspricht. So mögen z. B. in Fig. 25 den drei nahe aneinander liegenden Punkten ABC der einen Ebene, die drei nahe aneinander liegenden Punkte $A_1B_1C_1$ der anderen entsprechen (um die übrigen etwa vorhandenen Punktgruppen $A_2B_2C_2$ etc. bekümmern wir uns jetzt nicht). Den Geraden AB und AC entsprechen im Allgemeinen Curvenbogen A_1B_1 und A_1C_1, die aber bei der angenommenen Kleinheit gleichfalls als Gerade betrachtet werden können. Alle Linien lassen sich übrigens, wie die Figur es angiebt, als Differentiale betrachten. Vorausgesetzt wird noch, dass der Differentialquotient $\frac{dZ}{dz}$ weder innerhalb $A_1B_1C_1$, noch in dessen nächster Nachbarschaft 0 oder ∞ werde.

Nun hat aber der Differentialquotient $\frac{dZ}{dz}$ an der Stelle A_1, die A entspricht, für alle Richtungen des Differentials *denselben Werth*, also muss $\frac{dZ_1}{dz_1} = \frac{dZ_2}{dz_2}$ sein, wobei es sich um Quotienten von Strecken handelt, wie im § 4. Sind aber zwei solche Quotienten gleich, so sind, wie dort gezeigt wurde, die entsprechenden Dreiecke ähnlich, denn die Quotienten der Längen und die Differenzen der Abweichungen stimmen überein. Also ist auch hier das unendlich kleine Dreieck ABC gleichstimmig ähnlich dem Dreiecke $A_1B_1C_1$. *Da-*

bei zeigt der absolute Betrag des Differentialquotienten $\frac{dZ}{dz}$ *an, in welchem Grössenverhältniss die beiden Zeichnungen stehen, während die Abweichung angiebt, um welchen Winkel homologe Seiten der beiden Dreiecke gegen einander gedreht erscheinen.* Man erkennt dies am deutlichsten bei der Schreibweise

$$dZ = dz\, f'(z) = dz \cdot \varrho\,(\cos\vartheta + i \sin\vartheta).$$

Unendlich kleine Theile beider Ebenen, die einander entsprechen, sind also im Allgemeinen *ähnlich*, d. h. die Abbildung ist eine *conforme*, die bestehende geometrische Verwandtschaft eine *isogonale* in dem schon mehrfach besprochenen Sinne. Besonders wichtig ist, dass unendlich kleinen Kreisen der einen Ebene unendlich kleine Kreise der anderen entsprechen.

Bezeichnet man mit $\overline{dZ}$ und $\overline{dz}$ die Längen von entsprechenden Linienelementen beider Ebenen, so hat man nach § 38

$$11) \qquad \overline{dZ} = \overline{dz}\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2},$$

wofür man nach den Gleichungen 3) und 4) auch schreiben kann

$$\overline{dz}\sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2}, \quad \text{oder} \quad \overline{dz}\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2}.$$

In der Kartographie wird der durch die Wurzel angegebene Vergrösserungsfactor als *Kartenmodul* bezeichnet. Er lässt sich, da $\varrho = \sqrt{(\xi + \eta i)(\xi - \eta i)}$ ist, auch schreiben

$$\sqrt{f'(x + yi) \cdot f'(x - yi)}.$$

Sein reciproker Werth spielt eine Rolle in der Theorie der Flüssigkeitsbewegungen, bei denen ein Geschwindigkeitspotential existirt.

§ 40. Die singulären Punkte.

Die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen wird gestört, wenn der Differentialquotient unendlich gross oder unendlich klein ist, was nur geschieht, wenn es mit dem absoluten Betrage der Fall ist. Es findet dann an der betreffenden Stelle eine unendlichfache Vergrösserung oder Verkleinerung statt. Solche Punkte heissen *singuläre* Punkte. Sie erfordern stets besondere Untersuchungen. Man könnte die Betrachtung auf diejenigen Punkte beschränken, für welche der Differentialquotient verschwindet. Ist er nämlich unendlich gross, so ergiebt sich aus der Anschauung der Abbildung sofort, dass er für die umgekehrte Function Null ist.

Allgemeineres lässt sich vorläufig nur wenig sagen. Einige Schlüsse kann man aus folgender Betrachtung ziehen.

Angenommen, für die unmittelbare Nachbarschaft eines Punktes z_1 sei die Entwicklung der Function $Z = f(z)$ nach dem Taylor'schen Satze möglich, dann hätte man, wenn z_{11} ein benachbarter Punkt ist,

$$f(z_{11}) = Z_{11} = f(z_1) + \frac{z_{11} - z_1}{1} f'(z_1) + \frac{(z_{11} - z_1)^2}{1 \cdot 2} f''(z_1) + \frac{(z_{11} - z_1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(z_1) + \cdots,$$

wobei zunächst anzunehmen ist, dass keiner der Differentialquotienten unendlich gross wird. Da $Z_1 = f(z_1)$ ist, kann man auch schreiben

$$Z_{11} - Z_1 = \frac{z_{11} - z_1}{1} f'(z_1) + \frac{(z_{11} - z_1)^2}{1 \cdot 2} f''(z_1) + \frac{(z_{11} - z_1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(z_1) + \cdots$$

Verschwindet nun der erste Differentialquotient nicht, so kann man $z_{11} - z_1$ so klein wählen, dass das erste Glied über alle anderen dominirt, so dass man, unter Vernachlässigung der letzteren, schreiben kann

$$Z_{11} - Z_1 = (z_{11} - z_1) f'(z_1),$$

was dasselbe ist, wie $dZ = dz \cdot f'(z_1)$. Man hat also das Resultat des vorigen Abschnitts wiedergefunden. Ist also z_{11} variabel, z_1 fest, und wandert z_{11} auf einem kleinen Elementarkreise mit Radius r, um den Punkt z_1, so wandert Z_{11} auf einem Elementarkreise der andern Ebene, dessen Radius das ϱ-fache des vorigen ist, wenn ϱ den absoluten Betrag des Differentialquotienten bedeutet, um den Punkt Z_1.

Ist hingegen $f'(z_1) = 0$, so wird der zweite Differentialquotient massgebend, und man erhält

$$Z_{11} - Z_1 = (z_{11} - z_1)^2 \cdot f''(z_1).$$

Hier ist $f''(z_1)$ als Differentialquotient der Function complexen Arguments $f'(z_1)$ für alle von z_1 ausgehenden Differentiale eine constante Grösse. Wiederum sei z_1 constant, z_{11} variabel, und zwar wandere letzterer Punkt auf einem kleinen Kreise um z_1. Wandert er von 0 bis 180°, so wandert $(z_{11} - z_1)^2$ offenbar um den doppelten Winkel, die Wanderung von 0 bis 360° macht also einen *doppelten Umgang* nöthig, wie dies in den §§ 3 bis 5 auseinandergesetzt wurde. Hat also die z-Ebene an der Stelle z_1 keinen Windungspunkt, so wird die Z-Ebene an der entsprechenden Stelle Z_1 mit einem Windungspunkte 1ter Ordnung behaftet, und an Stelle der schlichten Ebene z. B. tritt eine zweiblättrige. *Die Aehnlichkeit wird also insofern gestört, als dem Winkel α zwischen zwei Differentialen dz_1 und dz_{11}, die von z_1 ausgehen, ein Winkel 2α zwischen den entsprechenden Differentialen der Z-Ebene entspricht.* (Der Elementarkreis der Z-Ebene hat selbstverständlich wieder den ϱ-fachen

Durchmesser, wenn ϱ den absoluten Betrag des zweiten Differentialquotienten bedeutet.)

In diesem Falle wird z. B. eine den Punkt z_1 durchlaufende Curve in eine solche verwandelt, die in Z_1 einen Rückkehrpunkt hat, denn der Winkel 180° geht in 360° über. Die Diametralpunkte z_{11} und z_{111} des Elementarkreises der z-Ebene entsprechen also ein und demselben Punkte Z_{11} des Elementarkreises der Z-Ebene, so dass die Umkehrung der Function mehrdeutig ist. Die Frage der singulären Punkte hängt also mit der Vieldeutigkeit der Functionen zusammen.

Verschwinden hingegen die beiden ersten Differentialquotienten, so wird

$$Z_{11} - Z_1 = \frac{(z_{11} - z_1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(z_1),$$

so dass dem Winkel α zwischen zwei Differentialen der z-Ebene, die von z_1 ausgehen, ein Winkel 3α in der Z-Ebene entspricht. Dem Winkel 180° entspricht dann z. B. ein Winkel von 540° oder 180°, so dass kein Rückkehrpunkt entsteht. Wohl aber entsteht ein solcher, wenn die Curve in der z-Ebene an fraglicher Stelle eine Ecke mit dem Winkel 120° bildet. Die Z-Ebene hat jetzt, wenn die z-Ebene schlicht war, einen Windungspunkt 2ter Ordnung und ist dreiblättrig zu denken.

So kann man fortfahren. — Bei Betrachtung der einzelnen Functionen kommen wir auf die gegebenen Andeutungen in eingehenderer Weise zurück. Siebeck nennt übrigens die Punkte der Z-Ebene, für welche $f'(z) = 0$ ist, *Brennpunkte* der Curvensysteme der Z-Ebene.

§ 41. Die isothermischen Curvensysteme.

Durch zwei orthogonale Parallelenschaaren kann man die z-Ebene in ein System congruenter Rechtecke eintheilen, die im speciellen Falle Quadrate sein mögen. Bildet man die so eingetheilte Ebene mittels einer Function complexen Arguments $Z = f(z)$ auf die Z-Ebene ab, so verwandeln sich die beiden Parallelenschaaren in zwei Curvensysteme, die sich in Folge der Conformität der Abbildung rechtwinklig schneiden. Sind die Rechtecke der z-Ebene verschwindend klein, so entsteht eine Eintheilung der Z-Ebene in kleine rechtwinklige Flächenräume, die denen der z-Ebene angenähert ähnlich sind, also mit zunehmender Kleinheit auch unter sich der Aehnlichkeit zustreben, so dass wir ein Recht haben, von „ähnlichen Rechtecken“ zu sprechen. In diesem Sinne kann man

z. B. von einer Eintheilung der Ebene in „kleine Quadrate“ reden, die durch zwei orthogonale Curvensysteme herbeigeführt wird.

Schon in § 24 und 25 wurde angedeutet, dass man Curvensysteme, mit denen man eine solche Eintheilung erreichen kann, als *isothermische* bezeichnet. Als solche Systeme lernten wir bereits kennen

1) das Strahlenbüschel durch einen Punkt und die orthogonale concentrische Kreisschaar,

2) das Kreisbüschel durch zwei Punkte und die orthogonale Kreisschaar.

Ferner werden wir noch kennen lernen

3) das System der confocalen Ellipsen und Hyperbeln,

4) die Doppelschaar confocaler orthogonaler Parabeln,

5) das System confocaler Lemniscaten und das orthogonale Büschel gleichseitiger Hyperbeln, u. s. w.

Hingegen würde z. B. das System ähnlicher Ellipsen mit gemeinschaftlicher Axe und Centrum nebst der orthogonalen Curvenschaar nicht hierher gehören. Man kann hier zwar einen der elliptischen Elementarringe in „Quadrate“ eintheilen, die Fortsetzung dieser Zerlegung auf die übrigen Ringe durch die angewandten Orthogonalcurven würde aber auf nichtähnliche Rechtecke führen. Schon früher deuteten wir an, dass das Charakteristicum der Isothermenschaaren mit der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ zusammenhängt. Dies erklärt sich folgendermassen: Die abbildende Function sei

$$X + Yi = f(x + yi),$$

ihre Umkehrung

$$x + yi = \varphi(X + Yi).$$

Zu letzterer bilde man die conjugirte Function, indem man nicht nur in $X + Yi$, sondern auch in den vorkommenden Constanten, $-i$ an Stelle von $+i$ setzt, so dass man hat

$$x - yi = \varphi_1(X - Yi).$$

Durch Addition erhält man dann

$$x = \frac{\varphi(X + Yi) + \varphi_1(X - Yi)}{2},$$

durch Subtraction

$$y = \frac{\varphi(X + Yi) - \varphi_1(X - Yi)}{2i}.$$

Den Parallelen $x = a$ und $y = b$ der z-Ebene entsprechen also die orthogonalen Curvensysteme

12) $$\frac{\varphi(X+Yi)+\varphi_1(X-Yi)}{2} = a,$$

13) $$\frac{\varphi(X+Yi)-\varphi_1(X-Yi)}{2i} = b.$$

Da man nun die Eintheilung der z-Ebene in kleine congruente Rechtecke erhält, wenn a und b die Werthe einer arithmetischen Reihe annehmen, so erhält man die Eintheilung in kleine „ähnliche Rechtecke" in der Z-Ebene, indem dasselbe mit den rechten Seiten von 12) und 13) geschieht. So können z. B. a und b folgende Werthe annehmen:

$$\ldots., -3\alpha, -2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots.$$
$$\ldots., -3\beta, -2\beta, -\beta, 0, \beta, 2\beta, 3\beta, \ldots.,$$

und zwar erhält man die Eintheilung in „kleine Quadrate", wenn $\alpha = \beta$ ist. Die Ausdrücke a und b heissen die *isothermischen Parameter* der beiden Curvensysteme.

Nun ist aber x der reelle Theil der Function complexen Arguments $\varphi(X+Yi)$, y der von i befreite imaginäre Theil derselben, folglich genügt nach den Gleichungen 5) und 6) x sowohl, wie y, der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}=0$, und dasselbe gilt von den linken Seiten der Gleichungen 12) und 13), die nun als Integrale der Gleichung $\Delta u = 0$ zu betrachten sind.

Die früher angegebenen Definitionen der isothermischen Curvensysteme, deren eine auf der Möglichkeit der Eintheilung der Ebene in unendlich kleine Quadrate beruhte, während die andere verlangte, dass das System sich in Cartesischen Coordinaten in einer reellen Form $u = c$ schreiben liesse, deren linke Seite der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ genügt, sind also vollkommen identisch. Der Name „isothermisch" beruht auf den früher angedeuteten physikalischen Gründen.

Die isothermischen Curvensysteme leisten als krummlinige Coordinaten ganz ausserordentliche Dienste. Wie man in der z-Ebene jeden Punkt durch seine Coordinaten $x = a$ und $y = b$ fixiren kann, so kann man dasselbe mit jedem Punkte der Z-Ebene mittels der isothermischen Coordinaten

$$\frac{\varphi(X+Yi)+\varphi_1(X-Yi)}{2} = a$$

und

$$\frac{\varphi(X+Yi)-\varphi_1(X-Yi)}{2i} = b,$$

die sich in ihm schneiden. Dies ermöglicht die Uebertragung der Geometrie der z-Ebene in eine neue Geometrie der Z-Ebene. Den Curven $f(xy) = 0$ der z-Ebene entsprechen dabei die Curven

14) $f\left[\frac{\varphi(X+Yi)+\varphi_1(X-Yi)}{2}, \frac{\varphi(X+Yi)-\varphi_1(X-Yi)}{2i}\right]=0$

der Z-Ebene, und viele Eigenschaften der letzteren lassen sich sofort aus denen der ersteren ableiten. Die späteren Beispiele werden dies näher erläutern.

Selbstverständlich kann man mittels der behandelten Function $X+Yi=f(x+yi)$ auch von der Z-Ebene zur z-Ebene übergehen, da die conjugirte Function $X-Yi=f_1(x-yi)$ auf

$$X=\frac{f(x+yi)+f_1(x-yi)}{2}$$

und

$$Y=\frac{f(x+yi)-f_1(x-yi)}{2i}$$

schliessen lässt, so dass den Curven $X=a$ und $Y=b$ die Orthogonalschaaren

$$\frac{f(x+yi)+f_1(x-yi)}{2}=a \quad \text{und} \quad \frac{f(x+yi)-f_1(x-yi)}{2i}=b$$

entsprechen, von denen sich dasselbe, wie von den obigen, aussagen lässt.

Analytisch folgt die Orthogonalität beider Schaaren noch aus der Differentialgleichung

15) $$\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y}=0,$$

die sich aus den Gleichungen 3) und 4) durch Multiplication ergiebt.

Ist nämlich $f(xy)=c$ die Gleichung einer Curvenschaar, so ist ihre Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial x}+\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

also

α) $$\frac{\frac{\partial f(xy)}{\partial x}}{\frac{\partial f(xy)}{\partial y}}=-\frac{dy}{dx}.$$

(Vgl. den Satz von der impliciten Differentiation).

Aus der Betrachtung zweier orthogonaler Curvenstücke AB und BC (Fig. 26) ergiebt sich aber

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{dx_1}{dy_1}.$$

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man als Differentialgleichung der Orthogonalschaar

β) $$\frac{\frac{\partial f_1(xy)}{\partial x}}{\frac{\partial f_1(xy)}{\partial y}}=\frac{dx}{dy}.$$

Die Curvenschaaren $f(xy) = c$ und $f_1(xy) = c_1$ sind also Orthogonalschaaren, wenn

$$\frac{\frac{\partial f(xy)}{\partial x}}{\frac{\partial f(xy)}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial f_1(xy)}{\partial y}}{\frac{\partial f_1(xy)}{\partial x}}$$

ist. Setzt man aber für $f(xy)$ und $f_1(xy)$ den reellen resp. imaginären Theil der Function $X + Yi = \psi(x + yi)$ ein, so erhält man leicht die obige Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

als Bedingungsgleichung dafür, dass die Curvenschaaren $X = a$ und $Y = b$ orthogonale sind. Diese ist aber in Folge der Gleichungen 3) und 4) erfüllt.

§ 42. Ableitung neuer Isothermenschaaren.

Neben diesen Hauptsystemen von Isothermenschaaren giebt aber jede Function complexen Arguments noch zu zahlreichen anderen Veranlassung. So folgt z. B. aus

$$X + Yi = f(x + yi)$$

und

$$X - Yi = f_1(x - yi)$$

durch Multiplication

$$X^2 + Y^2 = f(x + yi) f_1(x - yi),$$

so dass den Kreisen $\lg R = a$ die Isothermenschaar

$$\tfrac{1}{2} \lg \left[f(x + yi) \cdot f_1(x - yi) \right] = a,$$

oder

16) $$\tfrac{1}{2} \left[\lg f(x + yi) + \lg f_1(x - yi) \right] = a$$

entspricht, deren linke Seite ebenso, wie $\frac{1}{2} \lg (X^2 + Y^2)$, als reeller Theil der Function $\lg f(x + yi)$ der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt.

Ebenso gelangt man durch Division der conjugirten Ausdrücke auf

$$\frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{f(x + yi)}{f_1(x - yi)},$$

woraus folgt

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{1}{2i} \left[\lg f(x + yi) - \lg f_1(x - yi) \right].$$

Für die linke Seite schreibe man, wie früher, $\arctan \frac{Y}{X}$, dann sieht

man, wie dem Strahlenbüschel $\Theta = \arctan \frac{Y}{X} = b$ durch Null die zur Schaar 15) orthogonale Isothermenschaar

$$17) \qquad \frac{1}{2i}\left[\lg f(x+yi) - \lg f_1(x-yi)\right] = b$$

entspricht, die als der von i bestimmte imaginäre Theil der Function $\lg f(x+yi)$ gleichfalls der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt.

Dies giebt zu neuen Rechteckseintheilungen Anlass.

Aehnlich ist es mit den concentrischen Kreisen um einen beliebigen Punkt $a+bi$ der Z-Ebene und dem Strahlenbüschel durch denselben. Zu diesem Zwecke multiplicire und dividire man, wie oben, die conjugirten Gleichungen

$$X + Yi - (a+bi) = f(x+yi) - (a+bi)$$

und

$$X - Yi - (a-bi) = f_1(x-yi) - (a-bi).$$

Die linke Seite geht durch Multiplication über in

$$R^2 = (X-a)^2 + (Y-b)^2,$$

durch Division, Logarithmirung und Zusetzung des Factors $\frac{1}{2i}$ in

$$\arctan \frac{Y-b}{X-a} = \frac{1}{2i} \lg \frac{X+Yi-(a+bi)}{X-Yi-(a+bi)},$$

so dass der isothermischen Kreisschaar $\lg R = c$ um den Punkt $a+bi$ der Z-Ebene die Isothermenschaar

$$18) \quad \frac{1}{2}\left[\lg\left(f(x+yi)-(a+bi)\right) + \lg\left(f_1(x-yi)-(a-bi)\right)\right] = c,$$

dem Strahlenbüschel $\arctan \frac{Y-b}{X-a} = \gamma$ durch diesen Punkt die zu 18) orthogonale Isothermenschaar

$$19) \quad \frac{1}{2i}\left[\lg\left(f(x+yi)-(a+bi)\right) - \lg\left(f_1(x-yi)-(a-bi)\right)\right] = \gamma$$

entspricht. Auch hier genügen die linken Seiten der Differentialgleichung $\Delta u = 0$, und die Eintheilung der z-Ebene in ähnliche Rechtecke wird durch arithmetische Werthfolgen von c und γ erzielt.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass jede Curvenschaar, welche die Parallelenschaar $X = a$ und $Y = b$ isogonal durchsetzt, wiederum eine Parallelenschaar, also eine Isothermenschaar ist. Ist der Neigungswinkel α, so hat die Gleichung die Form

$$Y - AX = b,$$

wo $A = \tan \alpha$, b der Schnittpunkt auf der imaginären Axe ist. Die Orthogonalschaar lässt sich z. B. schreiben

$$Y + \frac{1}{A} X = a,$$

wo a der Schnittpunkt auf der imaginären Axe ist. Beide Gleichungen genügen mit den linken Seiten der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Arithmetische Werthfolgen von a und b geben die Eintheilung in ähnliche Rechtecke. Statt beider Gleichungen kann man schreiben

$$\frac{X+Yi-(X-Yi)}{2i} - A\,\frac{X+Yi+(X-Yi)}{2} = b,$$

$$\frac{X+Yi-(X-Yi)}{2i} + \frac{1}{A}\cdot\frac{(X+Yi)+(X-Yi)}{2} = a.$$

Setzt man wieder $f(x+yi)$ und $f_1(x-yi)$ für $X+Yi$ resp. $X-Yi$, so erhält man die Gleichung neuer Isothermenschaaren, welche das System der Curven

$$\frac{f(x+yi)+f_1(x-yi)}{2} = a \quad \text{und} \quad \frac{f(x+yi)-f_1(x-yi)}{2i} = b$$

isogonal durchsetzen. So ergiebt sich beiläufig der Satz, *dass isogonale Trajectorien eines isothermischen Curvensystems stets wieder ein isothermisches Curvensystem geben.*

Man kann dies jedoch geometrisch ohne Weiteres erkennen, da man die Trajectorien als Diagonalcurven der „ähnlichen Rechteckseintheilung" betrachten darf.

Die beiden neuen Systeme lassen sich schreiben

$$\frac{f(x+yi)}{2}\left(\frac{1}{A}-i\right) + \frac{f_1(x-yi)}{2}\left(\frac{1}{A}+i\right) = a$$

$$\frac{f(x+yi)}{2}(-A-i) + \frac{f_1(x-yi)}{2}(-A+i) = b.$$

Links steht also in diesem Falle der reelle Theil der Function

$$f(x+yi)\left(\frac{1}{A}-i\right) \quad \text{resp.} \quad f(x+yi)(-A-i),$$

woraus sich die Erfüllung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ ergiebt. Auf andere Wege, zu den isogonalen Trajectorien zu gelangen, kommen wir später zurück. Die Gleichungen lassen sich in der Regel direct hinschreiben, z. B. bei den Curven, die den log. Spiralen $R = ck^{\Theta}$ entsprechen, welche die isogonalen Trajectorien der eben besprochenen Kreisschaaren sind.

§ 43. Symmetrie und Reciprocität bei gewissen Isothermenschaaren.

Ist $X+Yi = f(x+yi)$ eine Function, welche das Imaginäre nur in der Variabelen, nicht aber in den Constanten enthält, so ist die conjugirte $f_1(x-yi)$ identisch mit $f(x-yi)$, also folgt $X-Yi = f(x-yi)$, d. h.: *Conjugirten Werthen des Arguments*

entsprechen conjugirte Werthe der Function, mit andern Worten: *Gebilden der z-Ebene, die gegen die reelle Axe symmetrisch sind, entsprechen Gebilde der Z-Ebene, von denen dasselbe gilt.*

Noch allgemeiner wird in der Functionentheorie folgender Satz bewiesen: *Entspricht bei einer analytischen Function einer stetigen Folge reeller Werthe des Arguments eine stetige Folge reeller Werthe der Function, so entsprechen conjugirten Werthen des Arguments conjugirte Werthe der Function.* Von der Symmetrie gilt dann dasselbe, wie oben.

Bei einer solchen Abbildung gehört also zu dem fundamentalen Isothermensysteme, welches der Parallelen zur x-Axe entspricht, die reelle Axe oder ein Theil derselben, und gegen diese findet Symmetrie statt. Jede Curve, die einer Linie $x = a$ entspricht, geht beim Umklappen um jene Axe in sich selbst über, jedes Individuum der Orthogonalschaar geht in ein anderes derselben über. Die isogonale Trajectorienschaar ferner, welche die Fundamentalsysteme unter 45^0 schneidet, geht beim Umklappen um die reelle Axe in ihre Orthogonalschaar über.

Ist nun $f(z)$ eine Function der genannten Art, so lässt sich leicht zeigen, dass jene Symmetrieverhältnisse erhalten bleiben, wenn die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z = (a + bi) . f(z) + (c + di)$$

vermittelt wird. Der Factor $a + bi$ bedeutet nämlich eine Drehung nebst Vergrösserung, der Zusatz $c + di$ eine Verschiebung. Beides beeinflusst jene symmetrischen Beziehungen nicht, sie finden nur gegen die Gerade statt, welche bei der genannten Abbildung der reellen Axe entspricht.

An Stelle der Symmetrie tritt nach Cap. IV Reciprocität gegen einen Kreis, sobald die Function von der Form

$$Z = \frac{af(z) + b}{cf(z) + d}$$

ist, wo $f(z)$ in obiger Weise specialisirt ist, während a, b, c und d complexe Grössen bedeuten.

An Stelle der Function $f(z)$ könnte ferner überall eine Function $f[(\alpha + \beta i)z + \gamma + \delta i]$ treten, nur ist dann in der Ebene des Arguments nicht von der reellen Axe, sondern einer andern Geraden als Symmetrielinie auszugehen.

Man kann demnach bei solchen Functionen leicht Schlüsse auf gewisse geometrische Eigenschaften ziehen, deren Kenntniss die Untersuchung der einschlagenden Probleme wesentlich erleichtert.

Einige Beispiele mögen hier angegeben werden, dabei soll $f(z)$ stets eine der specialisirten Functionen bedeuten.

I. *Hat eine der Functionen $f(z)$ die Eigenschaft, dass für reelle Constanten α und $\varkappa$ die Gleichung*

$$f(z+\alpha) = \frac{1}{\varkappa . f(z)}$$

besteht, so gehört zu der Isothermenschaar mit dem Parameter $x = x_1$ ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, und gegen denselben findet Reciprocität beider Isothermenschaaren statt.

Der Beweis lässt sich folgendermassen führen. Aus der genannten Gleichung folgt zunächst

$$f(z) = \frac{1}{\varkappa f(z+\alpha)}, \quad \text{also} \quad f(z-\alpha) = \frac{1}{\varkappa f(z)},$$

so dass die Function auch der Relation

$$\sqrt{\varkappa} . f(z \pm \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa} . f(z)}$$

genügt. Da nun

$$\frac{1}{r[\cos\varphi + i\sin\varphi]} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)],$$

so leistet die Abbildung $\frac{1}{\sqrt{\varkappa} . f(z)}$ dasselbe, wie die Reihe folgender Operationen. Man führe zunächst die Abbildung $\sqrt{\varkappa} . f(z)$ durch, transformire dann die Isothermenschaaren mittels des Einheitskreises durch reciproke Radii vectores und klappe endlich die gesammte Zeichnung um die reelle Axe. Das entstandene Gebilde ist dann gleichzeitig das der Abbildung $\sqrt{\varkappa} . f(z \pm \alpha)$ entsprechende. Nach unserer Annahme findet aber Symmetrie gegen die reelle Axe statt, so dass die Operation des Umklappens erspart werden konnte. Es muss demnach jede der y-Curven sich selbst reciprok in Bezug auf den Einheitskreis sein, und da derselbe die ganze Schaar orthogonal schneidet, so gehört er selbst zur andern Isothermenschaar. Jedes Individuum der x-Curven geht durch reciproke Abbildung in ein anderes derselben Gruppe über. Der Einheitskreis kann offenbar nur den Linien $x = \pm\frac{\alpha}{2}$ entsprechen, und für die ursprüngliche Abbildung $Z = f(z)$ geht er über in den Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$. (Der Beweis würde ohne die Voraussetzung der Symmetrie nicht streng sein, da der Fall denkbar wäre, dass der Einheitskreis zwar von jeder y-Curve orthogonal durchschnitten würde, dass jedoch jeder Durchschnittspunkt ein Wendepunkt für die entsprechende Curve wäre. Durch die Voraussetzung der Symmetrie ist dieser Fall ausdrücklich ausgeschlossen.)

Beispiel: Aus der Gleichung

$$\Delta am(u \pm K) = \frac{\varkappa'}{\Delta amu} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta am(u \pm K)}{\sqrt{\varkappa'}} = \frac{\sqrt{\varkappa'}}{\Delta am(u)}$$

folgt, dass die Δam-Curven reciprok gegen den Kreis mit dem Radius $\sqrt{\varkappa'}$ sind, welcher den Linien $x = \pm \frac{2n+1}{2} K$ entspricht.

II. *Hat eine der Functionen $f(z)$ die Eigenschaft, dass für reelle Constanten β und $\varkappa$*

$$f(z + \beta i) = \frac{1}{\varkappa f(z)}$$

ist, so ist gleichzeitig

$$\sqrt{\varkappa} \cdot f(z \pm \beta i) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa} \cdot f(z)},$$

und zu den Isothermen mit dem Parameter $y = y_1$ gehört ein Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, der den Linien $y = \pm \frac{\beta}{2}$ entspricht und gegen den Reciprocität beider Isothermenschaaren stattfindet.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

Beispiel: Aus der Gleichung:

$$\sqrt{\varkappa} \cdot \sin am(u \pm iK') = \frac{1}{\sqrt{\varkappa} \cdot \sin am(u)}$$

folgt die Reciprocität der sin am-Curven gegen den Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, der den Linien $y = \pm \frac{2n+1}{2} K'$ entspricht.

III. *Hat eine der Functionen $f(z)$ die Eigenschaft, dass für reelles $\varkappa$*

$$f(zi) = \frac{1}{\varkappa f(z)}$$

ist, so findet bei der Abbildung $Z = f(z)$ Reciprocität gegen den Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ statt, und zwar gehen die Isothermen der einen Schaar in die der andern über. Der Kreis schneidet demnach beide Schaaren unter $\pm 45^0$.

Beispiel: Für den Modul $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ gilt die Gleichung

$$\cos am(iz) = \frac{1}{\cos am z}.$$

Die durch $\cos am(z)$ mod $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ dargestellten Isothermen sind demnach reciprok gegen den Einheitskreis, der sie unter 45^0 schneidet. Daraus folgt übrigens, wie spätere Capitel zeigen werden, dass zu den unter $\pm 45^0$ schneidenden Trajectorien der sin am-Curven und Δam-Curven mod $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ je eine Lemniscate und eine gleichseitige Hyperbel gehört.

Auch die allgemeinere Gleichung

$$\cos am\, iz = \frac{1}{\cos am(zx')}$$

lässt sich geometrisch dahin deuten, dass die Transformation der cos am-Curven mit dem Modul x mittels reciproker Radii vectores gegen den Einheitskreis auf die cos am-Curven für den Modul x' führt. Dies hängt mit Sätzen über die Reciprocität der Lemniscate zusammen.

Dass dieselben Curven eine ähnliche Reciprocität gegen den Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{x}{x'}}$ besitzen, folgt aus der Formel

$$\cos am(z + K + iK') = \frac{-ix'}{x \cdot \cos amz}.$$

In analoger Weise lassen sich eine Reihe anderer Formeln deuten, z. B.

$$\Delta am\, iz = \frac{1}{\sin co am(zx')}, \quad \sin am(iz \pm K') = \pm \frac{1}{\Delta am(zx')}.$$

Die allgemeineren Sätze über $f(z)$, die damit zusammenhängen, sind leicht auszusprechen.

Von einfacheren Functionen mögen noch $Z = e^z$ und $Z = \tan z$ genannt werden.

Aus $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ folgt, dass bei der Abbildung $Z = e^z$ der Linie $x = 0$ der Einheitskreis entspricht, gegen den Reciprocität stattfindet. Dass unendlich viele concentrische Kreise auftreten, folgt aus der Gleichung

$$e^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-z-b} = \frac{1}{e^{\frac{b}{2}}} \cdot \frac{1}{e^z}.$$

Man vergleiche hierzu den § 7.

Aus $\tan\left[\frac{\pi}{2} - x - yi\right] = \frac{1}{\tan(x+yi)}$ folgt die Reciprocität der tan-Curven gegen den Einheitskreis, welcher der Linie $x = \frac{\pi}{4}$ entspricht.

§ 44. Ist w Function von $z = x + yi$ und z-Function von $\zeta = \xi + \eta i$, so ist auch w Function von ζ. — Folgerungen aus diesem Satze.

Für reelle Functionen ist der Satz selbstverständlich, für solche complexen Arguments muss er bewiesen werden.

Ist w Function von $z = x + yi$, so ist nach § 34

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dz,$$

ist ferner z Function von $\zeta = (\xi + \eta i)$, so ist ebenso

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} (d\xi + \eta i).$$

Einsetzung des letzteren Werthes in die vorige Gleichung giebt

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} d\zeta = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + i \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} d\eta.$$

Jedenfalls ist w eine Function von ξ und η, also ist auch

$$dw = \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta,$$

somit ergiebt sich durch Vergleichung beider Ausdrücke

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dz}{d\xi}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \eta} = i \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

folglich auch

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = i \frac{\partial w}{\partial \xi}.$$

Demnach ist Gleichung 1) erfüllt und w eine Function des complexen Arguments $\zeta = \xi + \eta i$.

Daraus ergiebt sich folgende wichtige Consequenz: Es sei

$$w = f(z) = u(xy) + iv(xy),$$

also, da $z = x + yi$ ist,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0;$$

es sei ferner

$$z = x + yi = \varphi(\zeta) = \varphi(\xi\eta) + i\psi(\xi\eta),$$

also, da $\zeta = \xi + \eta i$ ist,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0.$$

Setzt man dann in w für x und y die isothermischen Parameter $\varphi(\xi\eta)$ und $\psi(\xi\eta)$ ein, wodurch entstehen mag

$$w = u[\varphi(\xi\eta), \psi(\xi\eta)] + iv[(\varphi(\xi\eta), \psi(\xi\eta)] = u_1(\xi\eta) + iv_1(\xi\eta),$$

so muss, da nach Obigem w eine Function von $\xi + \eta i$ ist, sein:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} = 0,$$

d. h. *genügt eine reelle Function $u(xy)$ [oder $v(xy)$] der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ und setzt man für x und y die Parameter $\varphi(\xi\eta)$ und $\psi(\eta)$ zweier orthogonaler Isothermenschaaren ein, so genügt u in seiner neuen Gestalt $u_1(\xi\eta)$ wiederum dieser Differentialgleichung und*

$u_1(\xi\eta) = a$ *stellt wieder ein isothermisches Curvensystem,* $v_1(\xi\eta) = b$ *seine Orthogonalschaar dar.*

Während also die Einführung neuer Coordinaten in die Gleichung $\Delta u = 0$ die Gestalt derselben im Allgemeinen wesentlich ändert*), bleibt *sie bestehen, sobald eine isothermische Substitution stattfindet.*

Kann man also diese Differentialgleichung unter gewissen vorgeschriebenen Bedingungen integriren, so kann man mit Hülfe isothermischer Substitutionen, oder was auf dasselbe, hinauskommt, mit Hülfe der conformen Abbildung auf synthetischem Wege beliebig viele Lösungen für neue Bedingungen ausführen**). Unser Satz wird daher häufig so ausgedrückt:

Ist $u(xy)$ *ein Integral der Differentialgleichung* $\Delta u = 0$, *und setzt man für* x *und* y *die Parameter zweier orthogonaler Isothermensysteme ein, z. B.* $\varphi(\xi\eta)$ *und* $\psi(\xi\eta)$, *so ist auch die neue Function* $u_1(\xi\eta)$ *ein Integral obiger Differentialgleichung.*

Geometrisch deutet sich das Ganze folgendermassen: In der z-Ebene habe man die orthogonale Isothermenschaar $u(xy) = a$ und $v(xy) = b$, welche den Parallelenschaaren $u = a$ und $v = b$ der w-Ebene entsprechen. Man bilde jetzt die z-Ebene mittels einer Function complexen Arguments $\zeta = f(z)$ oder $\xi + \eta i = f(x + yi)$ ab, deren Umkehrung $x + yi = f_1(\xi + \eta i) = \varphi(\xi\eta) + i\psi(\xi\eta)$ sei, so dass die Curven $u(xy) = a$ und $v(xy) = b$ in Curven $u_1(\xi\eta)$ und $v_1(\xi\eta)$ übergehen. Die letzteren sind dann isothermische Curvenschaaren, die wieder eine conforme Abbildung der obigen Parallelenschaaren sind.

Der analytische Beweis könnte also durch folgenden Anschauungsbeweis ersetzt werden: *Sind zwei Ebenen zu einer dritten conform, so sind sie unter sich conform.*

In dem bewiesenen Satze liegt ein Hebel zur Lösung zahlreicher

---

*) Vgl. z. B. Jacobi: Ueber eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

Crelle's Journal, Bd. 36, S. 113. Dort wird die allgemeine Substitution durchgeführt. Vergl. auch Kirchhoff: Vorlesungen über math. Physik, 17. Abschnitt.

**) Lehrreich sind in dieser Beziehung zwei Abhandlungen von O. Hentschel:

a) „Ueber einige conforme Abbildungen". Inauguraldissertation, Jena 1871, auch im 17. Jahrgange der Zeitschr. für Math. und Physik abgedruckt.

b) Conforme Abbildung mehrerer einfach zusammenhängender Flächen, welche den unendlich fernen Punkt enthalten. Programm des Gymnasiums zu Salzwedel, 1874.

Probleme der mathematischen Physik, die auf die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ hinauskommen. Dieser Zusammenhang wird sich bequem durch ein Beispiel erörtern lassen, welches im nächsten Abschnitt vollständig durchgeführt wird.

§ 45. Ein physikalisches Beispiel zum vorigen Satze.

Zu den Problemen, die unter der Herrschaft des logarithmischen Potentials stehen, gehört, wie schon erwähnt, das der stationären elektrischen Strömung in einer unendlichen (oder begrenzten) ebenen Platte, in welche unter irgend welchen Bedingungen constante elektrische Ströme ein- und ausgeleitet werden, wobei übrigens die Zahl der positiven und negativen Elektroden nicht dieselbe zu sein braucht.

Nach Seite 51 ist für den einfachsten Fall, bei dem die Elektricität in *einem* Punkte (eigentlich einem kleinen Kreise) einströmt, in unendlichem Bereiche abgeleitet wird, das Potential

$$V = -c_1 . \lg r .$$

Der Einfachheit halber werde $c_1 = 1$ gesetzt.

Schreibt man statt r jetzt $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, so genügt das Potential V, wie wir bereits wissen, der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Die praktische Bedeutung des Potentials ist hier die, dass es die Stärke der elektrischen Spannung in den einzelnen Punkten der Platte angiebt. Die isothermischen Curven

$$\lg \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = a ,$$

welche concentrische Kreise sind, stellen also die *Linien gleicher Spannung* dar. Senkrecht gegen dieselben geschieht das Wandern der Elektricität, so dass die orthogonalen Geraden

$$\arctan \frac{y-b}{x-a} = b$$

die *Strömungslinien* geben.

Es fragt sich nun, welches die Gestalt der Spannungscurven und Strömungslinien sein wird, wenn die Elektricität gleich stark in *zwei* Einströmungspunkten eingeleitet und im unendlichen Bereiche abgeleitet wird.

Man denke daran, dass bei der Abbildung $\xi + \eta i = \sqrt{x + yi}$ jedem Punkte der z-Ebene zwei Punkte der ζ-Ebene entsprechen (vgl. § 5), während dem unendlichen Punkte wiederum der unendliche entspricht. Man bilde also die Spannungscurven und Strom-

linien des vorigen einfachen Problems mittels dieser Function ab (die Berechtigung zu diesem Verfahren kann hier nicht näher erörtert werden)*).

War z. B. vorher der Einströmungspunkt der Punkt $+1$ der reellen Axe, also die Schaar der Spannungscurven

$$u = \lg \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = a,$$

so gehen sie, da aus $\xi + \eta i = \sqrt{x + yi}$ folgt:

$$x + yi = \xi^2 - \eta^2 + 2\xi\eta i,$$

also $x = \xi^2 - \eta^2$, $y = 2\xi\eta$, über in

$$u_1 = \lg \sqrt{(\xi^2 - \eta^2 - 1)^2 + 4\xi^2\eta^2} = a.$$

Dieser Ausdruck genügt nach vorigem Satze gleichfalls der Differentialgleichung des Potentials und den sonstigen nöthigen Bedingungen. Er stellt in der That die Spannungscurven des neuen Problems dar. Dieselben sind leicht zu discutiren.

Die Gleichung lässt sich schreiben

$$(\xi^2 - \eta^2 - 1)^2 + 4\xi^2\eta^2 = e^{2a},$$

oder

$$[(\xi + 1)^2 + \eta^2] \cdot [(\xi - 1)^2 + \eta^2] = e^{2a}.$$

Hier bedeutet die eine Klammer das Quadrat eines von -1 nach $\xi + \eta i$ gehenden Radiusvectors p, die andere das Quadrat eines von $+1$ ausgehenden, so dass sich die Gleichung auch als

$$p \cdot q = e^a$$

oder

$$\lg pq = a$$

darstellen lässt.

Es handelt sich also um ein System *confocaler Lemniscaten* (*Cassinischer* Linien) mit den Brennpunkten ± 1.

Die Strömungslinien des vorigen Falles, auf $+1$ bezogen, hatten die Gleichung

$$v = \arctan \frac{y}{x-1} = b,$$

deren linke Seite gleichfalls in isothermischer, der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügender Form geschrieben ist. Sie geht über in

$$v_1 = \arctan \frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2 - 1} = b,$$

genügt in der neuen Form nach vorigem Satze der Differentialgleichung und stellt die Strömungslinien des neuen Problems dar. In der Form

$$\frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2 - 1} = \tan b = \beta$$

*) Vgl. die Litteratur-Nachweise zu diesem Capitel.

erkennt man sie als Curven 2ten Grades, die sich als gleichseitige Hyperbeln documentiren, die durch die Punkte ± 1 gehen und, wie aus der Conformität der Abbildung folgt, die Lemniscaten orthogonal durchschneiden.

Eigenthümlich ist nun folgendes: Die Neigungswinkel der Radii vectores der Lemniscaten sind

$$\vartheta = \arctan\frac{\eta}{\xi-1}, \quad \vartheta_1 = \arctan\frac{\eta}{\xi+1},$$

so dass

$$\vartheta + \vartheta_1 = \arctan\frac{\eta}{\xi-1} + \arctan\frac{\eta}{\xi+1} = \pi - \arctan\frac{\frac{\eta}{\xi-1}+\frac{\eta}{\xi+1}}{\frac{\eta}{\xi-1}\cdot\frac{\eta}{\xi+1}-1}$$

$$= \pi - \arctan\frac{2\xi\eta}{\eta^2-\xi^2-1},$$

also, abgesehen von der Constanten π und dem Vorzeichen, gleich $\arctan\frac{2\xi\eta}{\xi^2-\eta^2-1}$, d. h. gleich dem Ausdrucke für v_1 ist. Die gleichseitigen Hyperbeln folgen also dem Gesetze

$$\vartheta + \vartheta_1 = \text{constans}.$$

An Stelle der Linien $r = a$ und $\vartheta = \gamma$ des ersten Problems sind also getreten die Linien

$$p \cdot q = a \quad \text{und} \quad \vartheta + \vartheta_1 = \gamma$$

des zweiten Problems.

Der Grund dieses Zusammenhanges wird sich im nächsten Capitel klären, dem eine Zeichnung dieses Curvensystems beigegeben ist. Als Isothermenschaaren sind diese Curven zuerst betrachtet bei Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes, Cap. 13.

[An Stelle der electrodynamischen Deutung kann man ohne Weiteres die isothermische nach Analogie von § 25 setzen.]

Nach der von Herrn Dr. Guébhard ersonnenen elektrochemischen Methode kann man das entsprechende Experiment so ausführen, dass die Spannungscurven in Gestalt Nobili'scher Farbenringe mit grosser Genauigkeit wieder gegeben werden. Man vergleiche: „Sur une méthode expérimentale etc." Comptes rend., 90, 1880 (April), „Sur les lignes équipotentielles etc.", daselbst (10. Mai).

§ 46. Höhere Differentialquotienten und Krümmungsradien; kinematische und geometrische Andeutungen.

Anwendungen auf die Hydrodynamik, besonders auf die Theorie freier Ausflussstrahlen*), veranlassen noch die folgenden Betrachtungen.

*) Vgl. Kirchhoff: Vorlesungen über math. Physik. I. S. 291 etc., und Auerbach: „Die theoretische Hydrodynamik etc." Gekrönte Preisschrift. § 26 und 27.

Die Ebene des Arguments umfasse die Zahlen $z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, die der Function die Zahlen $Z = X + Yi = R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = f(z)$, die Ebene einer andern Function, des Differentialquotienten der vorigen, die Zahlen $\zeta_1 = \varrho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) = f'(z)$. Tritt auch der zweite Differentialquotient auf, so umfasst dessen Ebene die Zahlen $\zeta_{11} = \varrho_{11}(\cos\vartheta_{11} + i\sin\vartheta_{11}) = f''(z)$. Alle diese Ausdrücke sind nach § 44 Functionen von einander.

Zunächst werde ein horizontales Differential dz der z-Ebene betrachtet, welches vom Punkte a nach dem benachbarten b geht. Die entsprechenden Punkte der Z-Ebene seien A und B, die der ζ_1-Ebene A_1 und B_1. Vergl. Figur 27, α, β, γ.

In der ζ_1-Ebene ist $O_1A_1 = \varrho_1$ der absolute Betrag des Differentialquotienten $f'(z)$, ϑ_1 seine Abweichung, folglich ist nach § 39 das Verhältniss der Längen $\overline{dZ}$ und $\overline{dz}$ durch $\varrho_1 : 1$ gegeben, d. h. $\overline{dZ} = \varrho_1 . \overline{dz}$, und ausserdem ist die Tangente CA im Punkte A des Differentials dZ parallel O_1A_1.

Dies lässt sich auch leicht kinematisch deuten. Bewegt sich z. B. der Punkt der z-Ebene mit der constanten Geschwindigkeit 1 auf den Parallelen $y = \beta$ der z-Ebene, *so bewegt sich nach § 41 der entsprechende Punkt der Z-Ebene auf den Curven*

$$\frac{\varphi(X + Yi) - \varphi(X - Yi)}{2i} = \beta,$$

wo φ die umgekehrte Function von $f(z)$ ist, und zwar ist die Geschwindigkeit an jeder Stelle ϱ, und die Richtung derselben ϑ_1, wo ϱ_1 und ϑ_1 die obige Bedeutung haben.

Von geometrischem Interesse ist Folgendes: *Für Kreise um den Nullpunkt der ζ_1-Ebene ist ϱ_1 constant; jedem von ihnen entsprechen also in der z-Ebene und Z-Ebene Curven, deren entsprechende Bogenlängen im Verhältniss $1 : \varrho_1$ stehen.* Dem Einheitskreise der ζ_1-Ebene z. B. entsprechen in den beiden andern Ebenen Curven von *gleicher Länge.* Die Aufsuchung dieser Systeme geschieht nach § 41 und 42. Beispiele werden später gegeben.

Dem Strahlenbüschel durch den Nullpunkt der ζ_1-Ebene entsprechen in der z- und Z-Ebene Curven, von denen je zwei in der Beziehung stehen, dass die Tangenten in entsprechenden Punkten beider um den constanten Winkel ϑ_1 gegeneinander gedreht sind. Der Beweis liegt darin, dass für jedes Individuum des Strahlenbüschels ϑ_1 constant ist.

Wenn ferner ein Punkt der ζ_1-Ebene sich auf einer Curve bewegt, die einer horizontalen Geraden der z-Ebene entspricht, so dreht sich sein Radius ϱ_1 in irgend einem Sinne. *Wechselt dieser*

Drehungssinn, so erhält die entsprechende Curve der Z-Ebene einen Wendepunkt. Letzteres geschieht also stets, wenn sich von O_1 aus an die „Differentialcurve" eine Tangente legen lässt, welche die letztere nicht schneidet.

Passirt dabei die Differentialcurve den Nullpunkt, so ist die Richtung von ϱ_1 unbestimmt, ϱ_1 selbst gleich Null. Dadurch wird die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen nach den früher angegebenen Gesetzen gestört, es kann z. B. ein Rückkehrpunkt eintreten. [Da hier $\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \xi_1 \pm \eta_1 i = 0$ ist, so setzt Siebeck unter Beibehaltung der gewöhnlichen Rechenoperationen die reelle Grösse $\frac{\eta}{\xi} = \pm i$, d. h. $\tan\varphi_1 = \pm i$, so dass also die Curve der Z-Ebene im entsprechenden Punkte eine imaginäre Tangente hat, deren Neigungswinkel die trigonometrische Tangente $\pm i$ hat. Deshalb nennt er diesen Punkt der Z-Ebene im Einklang mit Plücker einen Brennpunkt der Curve.] Ein helleres Licht fällt auf diese Verhältnisse durch die Untersuchung der Krümmungsradien der den Parallelschaaren entsprechenden Curven der Z-Ebene.

In Fig. 27 ist die Tangente CA parallel $O,A,$, die Tangente $DB \parallel O,B,$, also der Richtungsunterschied $d\vartheta$, in der ζ,-Ebene gleich demselben in der Z-Ebene. Ebenso gross ist der Unterschied der Richtungen der Krümmungsradien MA und MB. Ist nun P der Krümmungsradius für A, so folgt $Pd\vartheta, = \overline{dZ}$, also

$$P = \frac{\overline{dZ}}{d\vartheta,} = \frac{\varrho,\overline{dz}}{d\vartheta,}.$$

In der ζ,-Ebene ist $\sphericalangle O,A,K, = \vartheta, - \vartheta,,$, wenn $\vartheta,,$ den Neigungswinkel der Tangente $K,A,$ bedeutet. Gleichzeitig ist aber $\vartheta,,$ die Abweichung von $f'(z)$, da zwischen der ζ,- und der nicht gezeichneten $\zeta,,$-Ebene sich die Beziehungen zwischen der Z- und ζ,-Ebene wiederholen. Also ist $\sphericalangle\gamma$ oder $\sphericalangle O,B,L, = (\vartheta, - d\vartheta,) - (\vartheta,, - d\vartheta,,)$ $= \vartheta, - \vartheta,, - (d\vartheta, - d\vartheta,,)$, also unter Vernachlässigung der Differentiale: $\sphericalangle\gamma = O,B,L, = \vartheta, - \vartheta,,$. Schlägt man um O, mit ϱ, den kleinen Bogen $A,N,$, so ist $A,N, = \varrho,d\vartheta,$, also in dem rechtwinkligen Dreiecke A,N,B, $\sin\gamma = \frac{\varrho,d\vartheta,}{d\zeta,}$. Wird der hieraus folgende Werth von $d\vartheta$, in P eingesetzt, so entsteht $P = \frac{\varrho,^2\overline{dz}}{\overline{d\zeta,}\,.\,\sin\gamma}$, und da endlich der absolute Betrag $\varrho,,$ des zweiten Differentialquotienten auf die Gleichung $\overline{d\zeta,} = \varrho,,\overline{dz}$ führt, so hat man

$$P = \frac{\varrho,^2}{\varrho,,\sin(\vartheta, - \vartheta,,)}.$$

Ist z. B. die Abbildung $Z = z^2$ zu behandeln, wobei $Z' = 2z$,

$Z' = 2$, also $\vartheta_{,} = \varphi$, $\varrho_{,} = 2r$, $\vartheta_{,,} = 0$, $\varrho_{,,} = 2$ ist, so folgt $P = \frac{2r^2}{\sin\varphi}$.
Hier folgt aber aus

$$R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi), \quad r^2 = R, \quad \varphi = \frac{\Phi}{2},$$

also ist der Krümmungsradius

$$P = \frac{R}{\sin\frac{\Phi}{2}}.$$

Im folgenden Capitel wird sich zeigen, dass bei dieser speciellen Abbildung die horizontalen Geraden der z-Ebene in Parabeln übergehen, die den Nullpunkt zum Brennpunkte, die reelle Axe zur Axe haben. Die Formel für den Krümmungsradius dieser Parabeln ist in der That die obige.

Aus der allgemeinen Formel für P ergiebt sich sofort, dass wenn $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,}$ von Null verschieden sind, aber $\vartheta_{,} = \vartheta_{,,}$ ist, d. h. die Tangente der Differentialcurve, durch den Nullpunkt geht, der Krümmungsradius der untersuchten Curven unendlich gross ist. Ein Wendepunkt tritt ein, wenn an dieser Stelle $\vartheta_{,} - \vartheta_{,,}$ sein Zeichen wechselt. Unter leicht festzustellenden Bedingungen kann ferner $P = 0$ werden. Dann ändert die Curve im Allgemeinen plötzlich ihre Richtung, sie passirt z. B. den entsprechenden Punkt eines Windungspunktes.

Handelt es sich in der z-Ebene um Gerade von der Neigung ψ, so ändert sich die Sache nur wenig. Wegen der Conformität hat dann dZ die Neigung $\vartheta_{,} + \psi$, $d\zeta$, die Neigung $\vartheta_{,,} + \psi$, an Stelle von γ tritt also jetzt $\vartheta_{,} - (\psi + \vartheta_{,,})$. So entsteht für den Krümmungsradius die Formel

$$P = \frac{\varrho_{,}^2}{\varrho_{,,}\sin(\vartheta_{,} - \vartheta_{,,} - \psi)},$$

die für das Strahlenbüschel durch einen beliebigen Punkt der z-Ebene und seine Abbildung in der Z-Ebene gilt. Sind $\varrho_{,}$ und $\varrho_{,,}$ endlich und verschieden von Null, so giebt $\psi = \vartheta_{,} - \vartheta_{,,} - 90^0$ den kleinsten Krümmungsradius, nämlich $P = \frac{\varrho_{,}^2}{\varrho_{,,}}$. Einmal für jeden solchen Punkt wird $P = \infty$, nämlich für die Curve, die der Geraden mit der Neigung $\psi = \vartheta_{,} - \vartheta_{,,}$ entspricht.

Nachträglich sei bemerkt, dass sich die obige kinematische Betrachtung auch auf die höheren Differentialquotienten ausdehnen lässt, wobei der absolute Betrag des zweiten als Beschleunigung aufgefasst werden kann.

Ueber diesen Punkt vergleiche man Möbius: Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorems, Crelle's Journal,

Bd. 36, Seite 91—94. Ueberhaupt lässt sich die Bewegung des starren, ebenen Systems mit Hülfe der conformen Abbildung in die Bewegung conform veränderlicher Systeme übertragen. Hierher gehört Einiges aus den Abhandlungen des Herrn Burmester, kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher Systeme betreffend, in der Zeitschrift für Mathem. und Physik, Bd. 19, 20, 23, und aus einer ferneren im 16. Bande der Mathematischen Annalen. In Band 20 der Zeitschrift für Mathem. und Physik wird z. B. auf Seite 405 das kreisverwandt-veränderliche System behandelt. Bemerkungen über die Kinematik des lemniscatisch-veränderlichen Systems gab ich selbst im 21. Bande der Zeitschrift für Mathem. und Physik, über die des lemniscatisch-veränderlichen Systems n^{ter} Ordnung und die Kegelfläche im 26. Bande derselben Zeitschrift. In modificirter Weise lassen sich diese Betrachtungen für die Hydrodynamik verwerthen, wozu man die bereits erwähnten Werke von Kirchhoff und Auerbach vergleichen mag. Die Geschwindigkeiten sind dann die reciproken der früheren.

Endlich sei noch erwähnt, dass eine Gruppe von Cubaturen und Reihensummirungen mit Hülfe des Differentialquotienten der Functionen complexen Arguments sich leicht und übersichtlich durchführen lässt.

Wird nämlich eine conforme Abbildung durch $Z = f(z)$ vermittelt und ist dabei $Z' = f'(z) = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, so geht im Allgemeinen jedes Flächenelement q der z-Ebene in ein ähnliches der Z-Ebene über, welches im ϱ-fachen Massstabe zu zeichnen ist, so dass es den ϱ^2-fachen Inhalt hat. Die Fläche $F = \Sigma q$ geht also über in eine Fläche $F_1 = \Sigma\varrho^2 q$, *und offenbar ist die Masszahl für den Inhalt von F_1 identisch mit der Masszahl für den Inhalt eines Körpers, der dadurch entsteht, dass man über der Originalfläche F an jeder Stelle ein Loth $h = \varrho^2$ errichtet.* Man kann also von F_1 auf J, oder wenn J bekannt ist, von diesem auf F_1 schliessen.

Ist z. B. die abbildende Function $Z = z^n$, wo n eine von Null verschiedene reelle Zahl ist, so ist

$$Z = n r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi],$$

und der Factor der Flächenvergrösserung ist $\varrho^2 = n^2 r^{2(n-1)}$. Die Lothe geben ein Rotationsparaboloid $2(n-1)^{ter}$ Ordnung. Wird dasselbe von einem Kreise mit Radius r um den Nullpunkt begrenzt, so wird dieser durch $Z = z^n$ in einen n-fach durchlaufenen Kreis abgebildet, dessen Inhalt $n r^{2n}\pi$ ist. Ebenso gross ist dann der Inhalt des Paraboloids $2(n-1)^{ter}$ Ordnung, und zwar ist bei positivem n der paraboloidische Körper innerhalb des Kreises, bei

negativem n der ausserhalb liegende Körper, der sich bei abnehmender Höhe ins Unendliche erstreckt, zu nehmen. Der Grenzfall $n = 0$ führt auf das Paraboloid — 2ter Ordnung, welches mit Hülfe der Abbildung $Z = \lg z$ zu behandeln ist, da hierfür

$$Z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos\varphi - i\sin\varphi\right]$$

ist. Der Kreisring mit dem Radius r_1 und r_2 geht dabei in ein Rechteck mit der Basis $\lg r_1 - \lg r_2$ und der Höhe 2π über (vgl. § 7), so dass der Inhalt des letzteren, ebenso der des Rotationsparaboloids 2ter Ordnung über dem Kreisringe mit den Radien r_1 und r_2, durch $2\pi \lg \frac{r_1}{r_2}$ gegeben wird.

Kennt man den Inhalt einer Fläche, in welche ein beliebig gegebenes Ebenenstück durch die Abbildung $Z = z^n$ übergeht, so kennt man auch den über der Originalfläche stehenden cylindrischen Ausschnitt des Parabaloidkörpers.

Vom Rotationsparaboloid könnte man leicht zu einer Parabel halb so hoher Ordnung übergehen, indem man nach Art des Cavaleri'schen Princips in gleichen Höhen Linien zieht, deren Länge dieselbe Masszahl hat, wie die Querschnittsfläche des Paraboloids. Die Parabelfläche hat dann dieselbe Inhaltsformel, wie der Paraboloidkörper. Man findet so für die Parabel $y = \xi^p$ den Inhalt $\frac{\xi^{p+1}}{p+1}$ und beweist somit zugleich, dass für reelles $p > -1$ der Werth der Reihe

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$
$$\lim n = \infty$$

ist, wobei p auch gebrochen und irrational sein kann.

Auch für reelles $p < -1$ und den Grenzfall $p = -1$ kann man die entsprechenden Formeln leicht aufstellen.

Der Fall $Z = z^2$ ist deshalb von Interesse, weil die Masszahl für den Inhalt des Rotationsparaboloids über beliebiger Fläche mit dem polaren Trägheitsmomente der letzteren als identisch betrachtet werden kann. Dasselbe lässt sich also graphisch durch eine Fläche darstellen und kann mit Hülfe des Planimeters leicht abgelesen werden.*)

Das Paraboloid — 2ter Ordnung ferner steht in Zusammenhang mit der Parabel — 1ter Ordnung, d. h. mit der Curve $y = \frac{1}{x}$ oder

*) Vergl. Siebeck, Zeitschrift für Mathem. und Physik, Bd. 10, Seite 80, wo jedoch ein Versehen zu corrigiren ist.

der gleichseitigen Hyperbel. Da dies auf den Grenzfall $Z = \lg \varepsilon$ führt, so erklärt sich die logarithmische Inhaltsformel für die gleichseitige Hyperbel, die für die Mechanik und zwar für das Capitel von der Arbeit eines abgeschlossenen Luftquantums bei constanter Temperatur, also unter Druckabnahme nach dem Mariotte'schen Gesetz, von so hoher Wichtigkeit ist. Dass man in ähnlicher Weise die Cylinderflächen der eben betrachteten Körper mit dem Umfange entsprechender Curven in Verbindung setzen kann, ist selbstverständlich.

Diese letzten Betrachtungen sollen nicht einen wissenschaftlichen Fortschritt geben — denn die Resultate lassen sich auch auf bekannten Wegen finden —, sondern den Zusammenhang des hier behandelten Gebiets mit andern Bereichen der Mathematik andeuten. Jedenfalls geben sie Anlass zu zahlreichen Uebungsbeispielen, deren Lösung sich in besonders eleganter Form darstellen lässt.

§ 47. Litteratur.

1) Originalwerk für die ersten Betrachtungen dieses Capitels ist Riemann's Dissertation: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.

2) Ueber die conforme Abbildung vergleiche man die in den Vorbemerkungen citirten Originalwerke von Lagrange, Gauss und die Siebeck'sche Abhandlung im 55. Bande des Crelle'schen Journals.

3) Die allgemeinen Verhältnisse sind mehr oder weniger ausführlich dargestellt in folgenden Lehrbüchern:

Durège, Elemente der Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Leipzig 1873, 2. Aufl.

Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale.

Thomae: Abriss einer Theorie der complexen Functionen. Halle 1873, 2. Aufl.

Lipschitz: Lehrbuch der Analysis, Bd. II, § 105—124. Bonn 1880.

Königsberger: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig 1874.

Schlömilch: Compendium der höheren Analysis, II, S. 35 etc.

Einen kürzeren Abriss giebt:

Durège: Theorie der elliptischen Functionen, Abschnitt 20.

Kirchhoff: Vorlesungen über mathem. Physik, Abschnitt 21.

4) Zu § 40 ist die Siebeck'sche Abhandlung in Crelle's Journal, Bd. 55, zu vergleichen. Ueber die Ausdehnung der Taylor'schen Reihenentwicklung auf complexe Variabele sehe man z. B.

Schlömilch, Comp. d. Anal., Bd. II, S. 86, wo sich auch historische Notizen befinden.

5) Zu § 41 cf. Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859, besonders § 94, Cas du potential cylindrique, Leçon XI: Systèmes cylindriques isothermes. Leçon XII und XIII geben instructive Beispiele.

6) Hierher gehörige Beispiele giebt ferner die Habilitationsschrift von K. v. d. Mühll: Ueber ein Problem der Kartenprojection, Leipzig 1868, auch im 69. Bande des Crelle'schen Journals abgedruckt.

3) Eine kurze Zusammenstellung des Wichtigsten nebst einigen Beispielen giebt Wangerin: Ueber eine neue Art der conformen Abbildung einer Ebene auf eine andere. Grunert's Archiv 55.

8) Wichtig ist eine Arbeit von H. A. Schwarz: „Ueber ebene algebraische Isothermen", Crelle's Journal, Bd. 77, in welcher nachgewiesen wird, dass sich alle algebraischen Isothermenschaaren durch Abbildung mittels algebraischer Functionen aus drei Fundamentalsystemen ableiten lassen. Dieselben sind: a) Die orthogonale Doppelschaar der Parallelen, b) das Strahlenbüschel nebst concentrischer Kreisschaar, c) das System derjenigen Siebeck'schen Curvenschaaren, die als sinam-Curven (mod k +, reell und < 1) bezeichnet werden. [Vergleiche Siebeck: Ueber eine Gattung von Curven 4. Grades, die mit den elliptischen Functionen zusammenhängen, Crelle's Journal, Bd. 57 und 59.] Es handelt sich also, wie dazu bemerkt werden mag, um die Eintheilung in a) doppelt unendlich viele, b) einfach unendlich viele, c) eine endliche Anzahl von Rechtecksräumen.

9) Zu § 45 vergleiche man C. Hildebrandt: Ueber die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene und einer Kugeloberfläche. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1881. Dasselbe Thema ist im Programm 1882 der Realschule zu Gundersheim behandelt. Die einschlagende Litteratur ist dort angegeben. In Riemann's Abhandlung: „Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe", Nr. III der „Gesammelten mathem. Werke", wird die Methode von Beez zur Fixirung der Spannungscurven besprochen.

10) Mit der Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ unter vorgeschriebenen Rand-Bedingungen — d. h. mit der Auffindung einer Function, von deren reellem Theile die Werthe auf einer gegebenen Begrenzung gegeben sind (z. B. gleich dem Logarithmus der Radii vectores der Grenzpunkte, die von einem Punkte im Innern ausgehen), die ferner innerhalb des begrenzten, einfach zusammenhängenden Bereichs als endlich und stetig definirt ist und dort der

Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen soll — beschäftigt sich bereits eine ziemlich umfangreiche Litteratur. Die Schlussparagraphen der Riemann'schen Dissertation gründen den Beweis der Bestimmbarkeit auf das Dirichlet'sche Princip, welches jedoch rücksichtlich der Strenge anfechtbar ist. Man vergleiche auch dessen „Theorie der Abel'schen Functionen", Crelle's Journal, Bd. 54 (1857). Herr H. A. Schwarz hat den Beweis mit Umgehung des Dirichlet'schen Princips in folgenden Abhandlungen geliefert:

„Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ für die Fläche eines Kreises." (15. Jahrg. der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.) Mai 1870.

„Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren." Ebendaselbst, August 1870.

„Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad .$$

unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen." Aus dem Monatsberichte der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom October 1870.

„Zur Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0."$$

Crelle's Journal, Bd. 74. (Zum Theil Wiedergabe der erstgenannten Arbeit.) 1872.

Man vergleiche auch Prym: Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Crelle's Journal, Bd. 79.

Veltmann: Die Bestimmung einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen. Zeitschrift für Mathem. u. Physik, Bd. 26.

Dass der Kreis und zwar der Einheitskreis als einfachste geschlossene Curve in den Vordergrund tritt, ist selbstverständlich. Nach den Principien der Abbildungstheorie kann man von ihm aus leicht zu anderen Begrenzungen übergehen.

An die Schwarz'schen Untersuchungen schliesst sich an:

11) Schottky: Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Inauguraldissertation. Berlin 1875.

Beispiele conformer Abbildungen giebt noch:

12) Amstein: Un exemple de représentation conforme. Bull. Soc. Vaud. Nat. XV, und: Quelques exemples de répresentation conforme avec leur application à un problème d'hydrodynamique. Ebendaselbst. XVI.

13) Während des Drucks finde ich angekündigt:

F. Klein: Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Leipzig 1882, B. G. Teubner.

14) Verspätet wird mir noch bekannt: Haton de la Goupillière: Mémoire sur une nouvelle théorie générale des lignes isothermes et du potentiel cylindrique. Journal de l'Ecole polytechnique. Cahier XXXVIII.

15) Die in den folgenden Capiteln gegebenen Beispiele sind, wo nicht anderes bemerkt wird, vom Verfasser in der Zeitschr. für Mathem. und Physik, Bd. 16, 18, 20, 21, 26, im Crelle'schen Journale Bd. 83, in den Mathematischen Annalen Bd. 18, und in einigen Programmen der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen, z. B. 1880, behandelt worden.

Sechstes Capitel.

Die Abbildungen $Z = z^2$ und $z = \sqrt{Z}$ und ihre Beziehungen zur lemniscatischen und cardioidischen Verwandtschaft.

§ 48. Allgemeines über die Abbildungen $Z = z^2$ und $z = \sqrt{Z}$

Beide Abbildungen sind schon mehrfach zur Sprache gekommen z. B. in den Paragraphen 4, 5 und 45. Es ist gezeigt worden, dass Kreise um den Nullpunkt beider Ebenen und Gerade durch denselben einander entsprechen, dass jedoch ein Winkel α im Nullpunkte der z-Ebene in den Winkel 2α der Z-Ebene übergeht, z. B. der Winkel 360° in den Winkel 720°, dass also die Z-Ebene als zweiblättrig oder als Windungsfläche 1. Ordnung zu betrachten ist, sobald die z-Ebene als einblättrig angesehen wird. Durch Figur 7 wurde der Charakter der Z-Ebene veranschaulicht.

Aus $X + Yi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$

oder

$R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

folgen durch Gleichsetzung des Reellen und Imaginären u. s. w. die Beziehungen:

1) $X = x^2 - y^2, \quad Y = 2xy, \quad R = r^2, \quad \Phi = 2\varphi,$

$$X - Yi = (x - yi)^2,$$

aus denen sich leicht ergiebt:

2) $$x = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}},$$

$$r = \sqrt{R}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{2} \text{ resp. } \frac{\Phi}{2} + 180^0.$$

Aus den Formeln für $x + yi$ und $x - yi$ folgt ferner durch Addition und Subtraction

$$3)\quad x = \frac{\sqrt{X+Yi} + \sqrt{X-Yi}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{X+Yi} - \sqrt{X-Yi}}{2}.$$

Entsprechende Kreise sind $R = c$ und $r^2 = c$, entsprechende Gerade $\Phi = \gamma$ und $2\varphi = \gamma$, resp. $\gamma + 360^0$. Die Construction entsprechender Punkte geschieht also mit elementaren Hilfsmitteln. Die Zweiblättrigkeit der Z-Ebene ist, wie schon früher auseinander gesetzt wurde, ein Mittel, die Zweideutigkeit der Beziehung $z = \sqrt{Z}$ aufzuheben. Man kann z. B. folgende Anordnung treffen: Der Verzweigungsschnitt, längs dessen sich beide Blätter der Z-Ebene ohne Zusammenhang durchkreuzen, sei die positive reelle Axe, dem 1. und 2. Quadranten der z-Ebene entspreche das obere, dem 3. und 4. das untere Blatt der Z-Ebene. Nur im Nullpunkte und im anderen Endpunkte des Verzweigungsschnitts, d. h. im unendlichen Punkte, hängen beide Blätter zusammen, denn $z = \sqrt{Z}$ ist für $Z = 0$ eindeutig, und dasselbe gilt von $Z = \infty$, sobald nur *ein* unendlicher Punkt angenommen wird. Umkreisung des Nullpunktes der Z-Ebene, überhaupt jedes Ueberschreiten des Verzweigungsschnitts führt ohne Unstetigkeit aus dem oberen Blatte ins untere, oder umgekehrt aus diesem in jenes.

Beide Ebenen sind nach § 39 conform aufeinander bezogen. Nur der Nullpunkt und der unendliche Punkt machen eine Ausnahme, was, wie wir bereits wissen, mit dem Verschwinden und dem Unendlichwerden des Differentialquotienten zusammenhängt. Es ist hier

$$\frac{dZ}{dz} = 2z = 2r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

also $2r$ der absolute Betrag des Differentialquotienten. Bei $Z = z^2$ findet also ausserhalb des Kreises mit Radius $r = \frac{1}{2}$ Vergrösserung, innerhalb desselben Verkleinerung statt, im Punkte ∞ ist die Vergrösserung ∞-fach, im Nullpunkte unendlich klein. Dass beide Punkte in der Z-Ebene Verzweigungspunkte sind, veranschaulicht man sich, indem man die Ebene als unendlich grosse Kugel betrachtet, auf der der Nullpunkt und der unendliche Punkt entgegengesetzte Lage haben. Die Abweichung φ des Differentialquotienten giebt an, dass die Linienelemente der Z-Ebene um den Winkel φ gegen die entsprechenden der z-Ebene verdreht sind.

In beiden Ebenen entsprechen sich folgende Curvenschaaren:

$$f(XY) = 0, \qquad f[(x^2 - y^2), (2xy)] = 0,$$
$$f(R\Phi) = 0, \qquad f[r^2, (2\varphi)] = 0,$$

$$f\left[\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}},\quad \sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}}\right]=0,\quad f(xy)=0,$$

$$f\left[\sqrt{R},\quad \frac{\Phi}{2}\right]=0,\qquad f(r\varphi)=0.$$

Gebilden der einen Ebene, die reciprok gegen einen Kreis um den Nullpunkt sind, entsprechen Gebilde der anderen, die reciprok gegen den entsprechenden Kreis sind. Gebilden der einen, die symmetrisch gegen eine Gerade durch den Nullpunkt sind, entsprechen solche, die symmetrisch gegen die entsprechende Gerade der anderen liegen. Beide Sätze hängen mit § 43 zusammen.

Drehung eines starren Gebildes um den Nullpunkt der einen Ebene giebt Drehung des entsprechenden um den Nullpunkt der anderen *ohne jede Aenderung der Gestalt.* Dieser Satz werde als der *Drehungssatz* bezeichnet. Der Vergrösserung eines Gebildes der einen Ebene, verbunden mit einer Verschiebung solcher Art, dass der Nullpunkt Aehnlichkeitspunkt wird, entspricht Vergrösserung und Verschiebung des entsprechenden Gebildes der andern, wobei wiederum der Nullpunkt Aehnlichkeitspunkt ist. *Die Aehnlichkeit des letzteren Gebildes bleibt also erhalten.* Beide Operationen lassen sich combiniren, ohne dass die Aehnlichkeit des Gebildes gestört wird.

Zu der Beziehung $f(XY)=0$ und $f[(x^2-y^2),\ 2xy]=0$ ist noch zu bemerken, dass den Curven n^{ten} Grades der Z-Ebene im Allgemeinen solche Curven vom $2n^{ten}$ Grade der z-Ebene entsprechen, deren Gleichung erhalten bleibt, wenn man die Vorzeichen von x und y gleichzeitig ändert. Klappt man also eine solche Curve erst um die x-Axe, dann um die y-Axe, so deckt sie sich in der Schlusslage mit der ersten Lage. Es finden also gewisse Symmetrieverhältnisse statt. Nicht in diesem Sinne symmetrische Curven $2n^{ten}$ Grades der z-Ebene gehen demnach nicht in Curven n^{ten} Grades der Z-Ebene über.

§ 49. Den Parallelen zur reellen und imaginären Axe der Z-Ebene entsprechen zwei Orthogonalschaaren gleichseitiger Hyperbeln der z-Ebene.

Nach Gleichung 1) dieses Capitels entsprechen den Curven $X=a$ und $Y=b$ die Curvenschaaren

$$4)\qquad x^2-y^2=a$$

$$5)\qquad 2xy=b.$$

Nach § 39 sind beide Schaaren orthogonal, nach § 41 genügen die linken Seiten der Gleichungen der Differentialgleichung $\Delta u=0$. Nehmen die rechten Seiten die Werthe von Gliedern arithmetischer Reihen an, so erhält man die Eintheilung der Ebene in „ähnliche

Rechtecke," sind die Differenzen in beiden Reihen dieselben, so hat man die Eintheilung in „kleine Quadrate". Bekanntlich stellen die Curven 4) und 5) *gleichseitige Hyperbeln* dar, deren Centrum der Nullpunkt ist. Die Hauptaxe der ersteren Schaar ist bei positivem a die reelle, bei negativem a die imaginäre Axe, denn die Scheitelpunkte sind die Punkte $\pm\sqrt{a}$, die Brennpunkte also die Punkte $\pm\sqrt{2a}$. Ersteres erkennt man daraus, dass die Gerade $X = a$ die reelle Axe im Punkte a schneidet. Für die andere Schaar sind die Linien $\pm 45^0$ die Axen. Dies folgt daraus, dass der Schnitt der Linien $Y = b$ mit der imaginären Axe der Punkt bi ist, dem der Punkt $\sqrt{bi}$ entspricht. Beide Schaaren sind congruent, denn Drehung um den Nullpunkt führt die Schaar $X = a$ in die Schaar $Y = b$ über, wobei nach vorigem Abschnitt auch in der z-Ebene die Congruenz erhalten bleibt. Alle Curven unter sich sind ferner nach der Bemerkung über Vergrösserungsoperationen ähnlich. Aus dem Drehungssatze folgt, *dass jeder beliebig liegenden Parallelenschaar der Z-Ebene eine gleichseitige Hyperbelschaar entspricht.* Folglich: *Jede isogonale Trajectorienschaar der gleichseitigen Hyperbelschaar ist wiederum eine solche. Ist der constante Schnittwinkel α, so sind die Axen beider Systeme um $\frac{\alpha}{2}$ gegen einander verdreht.* Letzteres folgt aus dem Verhalten des Nullpunktes.

Durch Figur 28 wird die quadratische Eintheilung der z-Ebene durch beide Hyperbelschaaren bei arithmetischer Aufeinanderfolge der a und b dargestellt. Die zugehörigen Parallelenschaaren der Z-Ebene wird sich der Leser leicht dazu construiren. Die Vergrösserungsverhältnisse erkennt man anschaulich an den einzelnen „Quadraten", ebenso die Störung der Conformität im Nullpunkte.

Die Linien

$$Y - AX = b$$

und

$$X + AY = aA$$

stellen, wenn b und a arithmetischen Reihen folgen, Orthogonalschaaren von Parallelen mit „ähnlicher Rechteckstheilung" dar. Dasselbe gilt also von den entsprechenden gleichseitigen Hyperbeln

6) $$2xy - A(x^2 - y^2) = b$$

und

7) $$x^2 - y^2 + A(2xy) = a.A,$$

deren Gleichungen mit ihren linken Seiten ebenso, wie die vorigen, der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen müssen.

Das Strahlenbüschel durch einen Punkt $a + bi$ der Z-Ebene geht nun selbstverständlich in ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln

durch die Punkte $\sqrt{a+bi}$ der z-Ebene über. Die entsprechende Coordinatenformulirung wird im nächsten Abschnitt von anderen Gesichtspunkten aus gegeben werden.

Physicalisch lässt sich die Figur 28 auf verschiedene Weise deuten. Werden zwei Hyperbeln derselben Schaar auf constanten Temperaturen t_1 und t_2 erhalten, so sind für den stationären Zustand die zwischenliegenden Hyperbeln der Schaar Isothermen. Statt der einen Hyperbel kann man zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade durch den Nullpunkt, statt der anderen eventuell den unendlich fernen Bereich nehmen. Aehnlich ist die Deutung für die constante elektrische Strömung. In einem sehr tiefen Kanale, der durch zwei solche Hyperbeln begrenzt ist, lässt sich ferner bei Nichtberücksichtigung der Reibung eine Flüssigkeitsbewegung als möglich betrachten, bei der die Stromlinien die übrigen Hyperbeln derselben Schaar sind. Schneidet man ferner längs einer Linie durch den Nullpunkt die Halbebene ab, und rollt man sie genau schliessend zum schlichten Kegel mit dem Nullpunkte als Spitze zusammen, so geben die Hyperbeln Raumcurven auf dieser Kegelfläche, die sich als Coordinaten und Isothermen oder elektrische Spannungscurven auf derselben in ähnlicher Weise deuten lassen. Das Modell giebt sofort das eigenthümliche Verhalten der Kegelspitze an.

§ 50. Dem Strahlenbüschel durch einen Punkt $a+bi$ der Z-Ebene und der concentrischen Orthogonalschaar von Kreisen entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte $\sqrt{a+bi}$ und eine Orthogonalschaar confocaler Lemniscaten.

Dieser Satz ist schon in § 45 als Beispiel behandelt worden. Er werde in modificirter Weise noch einmal bewiesen.

Der Kreis um den Punkt $a+bi$ der Z-Ebene mit Radius c lässt sich schreiben

$$[X+Yi-(a+bi)].[X-Yi-(a-bi)]=c^2.$$

Durch die Abbildung $Z=z^2$ geht er über in die Curve

$$[(x+yi)^2-(a+bi)].[(x-yi)^2-(a-bi)]=c^2,$$

oder, wenn jede Klammer in ihre beiden Factoren zerlegt wird, in

$$[x+yi-\sqrt{a+bi}].[x+yi+\sqrt{a+bi}].[x-yi-\sqrt{a-bi}].[x-yi+\sqrt{a-bi}]=c^2.$$

Setzt man nun $\sqrt{a+bi}=\alpha+\beta i$, so folgt $\sqrt{a-bi}=\alpha-\beta i$, also wird die Curvengleichung

$$[x+yi-\alpha-\beta i].[x+yi+\alpha+\beta i].[x-yi-\alpha+\beta i].[x-yi+\alpha-\beta i]=c^2.$$

Multiplicirt man jetzt die paarweise conjugirten Factoren aus, so entsteht

$$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]\cdot[(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2]=c^2,$$

oder 8) $p_1^2\cdot p_2^2=c^2$ resp. $p_1\cdot p_2=c$,

wobei die Radii vectores p und p_1 von den Punkten

$$\pm(\alpha+\beta i)=\sqrt{\alpha+bi}$$

ausgehen. Also:

Der concentrischen Kreisschaar $R=c$ um den Punkt $a+bi$ der Z-Ebene entspricht die Schaar der confocalen Lemniscaten

$$p_1\cdot p_2=c$$

um das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ der z-Ebene. Die beiden Brennpunkte dieser *Cassini-Curven* entsprechen dem Centrum der Kreisschaar. In Polarcoordinaten lässt sich die Lemniscatenschaar schreiben:

$$r^4-2r^2(a\cos 2\varphi+b\sin 2\varphi)+a^2+b^2=e^{2c}.$$

Die Gleichung einer Geraden, die vom Punkte $a+bi$ der Z-Ebene mit der Neigung $\Theta=\gamma$ ausgeht, lässt sich, wie schon öfter gezeigt ist, schreiben

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi-(a+bi)}{X-Yi-(a-bi)}=\gamma,$$

was durch die Abbildung $z=\sqrt{Z}$ übergeht in

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{(x+yi)^2-(a+bi)}{(x-yi)^2-(a-bi)}=\frac{1}{2i}\lg\frac{[x+yi-(\alpha+\beta i)][x+yi+(\alpha+\beta i)]}{[x-yi-(\alpha-\beta i)][x-yi+(\alpha-\beta i)]}=\gamma,$$

oder

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-(\alpha+\beta i)}{x-yi-(\alpha-\beta i)}+\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi+(\alpha+\beta i)}{x-yi+(\alpha-\beta i)}$$

$$=\arctan\frac{y-}{x-\alpha}+\arctan\frac{y+\beta}{x+\alpha}=\gamma,$$

oder endlich

9) $$\vartheta_1+\vartheta_2=\gamma$$

(resp. $\gamma+360^0$, was den entgegengesetzten Hyperbelarm giebt), wo ϑ_1 und ϑ_2 die Neigungen der Radii vectores p_1 und p_2 sind.

Da den Geraden der Z-Ebene gleichseitige Hyperbeln entsprechen, so liegt in dieser Gleichung das geometrische Gesetz derselben. Also:

Dem Kreisbüschel $\Theta=\gamma$ durch den Punkt $a+bi$ der Z-Ebene entspricht das Büschel gleichseitiger Hyperbeln $\vartheta_1+\vartheta_2=\gamma$ durch das Punktpaar $\pm(\alpha+\beta i)=\sqrt{a+bi}$ der z-Ebene.

Wie sich übrigens Gerade als Kreise mit einem im Unendlichen liegenden Centrum betrachten lassen, so kann man die gleichseitigen Hyperbeln als Lemniscaten betrachten, deren Brennpunkte in unendlicher Entfernung liegen.

Beide behandelten Curvengruppen sind orthogonale Isothermenschaaren. Ihre isothermischen Schreibweisen sind:

10) $$\lg p_1 p_2 = c \quad \text{und} \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = \gamma.$$

Nehmen c und γ die Werthe arithmetischer Reihen an, so hat man die Rechteckseintheilung, bei gleicher Differenz der Reihen die quadratische Eintheilung. Letztere ist in Fig. 29 dargestellt. Aus dem Verhalten sehr weit entfernter Punkte folgt, dass bei dieser Eintheilung die Asymptoten der Hyperbeln unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, was die Construction erleichtert. Auch dies ist in der Figur angedeutet. Später wird sich zeigen, dass die Brennpunkte der Hyperbeln auf der Lemniscate mit Doppelpunkt liegen. Die Maxima der Lemniscaten liegen übrigens auf dem Brennpunktskreise.

In Cartesischen Coordinaten, also in den Schreibweisen

$$\frac{1}{2}\left[\lg\left\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\right\}+\lg\left\{(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2\right\}\right]=c$$

und

$$\arctan\frac{y-\beta}{x-\alpha}+\arctan\frac{y+\beta}{x+\alpha}=\gamma,$$

wobei für letzteres auch einer der obigen imaginären Ausdrücke gesetzt werden kann, genügen die linken Seiten der Differentialgleichung $\Delta u = 0$.

Die isothermische und elektrodynamische Deutung der Figur 29 ist schon in § 45 theilweise gegeben. Man kann noch Folgendes hinzufügen: Werden zwei der Lemniscaten auf constanten Temperaturen t_1 und t_2 gehalten, so sind die zwischenliegenden Lemniscaten Isothermen. Werden zwei der Hyperbelarme auf gleichen Temperaturen gehalten, so sind die zwischenliegenden Hyperbeln Isothermen. Zwei der Lemniscaten, ebenso zwei der Hyperbeln, können auch als positive und negative Elektroden für das Einströmen der Elektricität in eine unbegrenzte Platte betrachtet werden. Dem Leser bleibe die Lösung des folgenden Specialfalles überlassen: Die reelle Axe ausserhalb AB sei die Einströmungselektrode, das Stück AB und das Loth in O die Ausströmungscurve. Welches sind die Spannungscurven? — Auch eine hydrodynamische Bewegung in einem entsprechend begrenzten Kanale lässt sich in ähnlicher Weise, wie oben, als möglich betrachten. Endlich ist noch auf die Erscheinung der Polarisationshyperbeln und Interferenz-Lemniscaten optisch zweiaxiger Krystalle (z. B. Salpeter) hinzudeuten, die gleichfalls durch Figur 29 veranschaulicht wird. Die Halbebene lässt sich zu einem Kegel mit O als Spitze aufrollen, der durch die Curven der Fig. 29 quadratisch eingetheilt ist. Man hat ohne Weiteres

die Spannungscurven und Stromlinien für den Fall, dass in einem Punkte des Kegelmantels Elektricität einströmt, im unendlichen Bereiche abgeleitet wird. Wiederum veranschaulicht das Modell das eigenthümliche Verhalten der Kegelspitze.

Lautet die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten, die auf einen Punkt $a + bi$ der Z-Ebene bezogen sind, $f(R\Theta) = 0$, so ist die Gleichung der entsprechenden Curven der z-Ebene

$$f[(p_1 p_2), (\vartheta_1 + \vartheta_2)] = 0,$$

wobei p_1 und p_2 wieder von $\pm\sqrt{a + bi}$ ausgehen, während ϑ_1 und ϑ_2 ihre Neigungen sind.

So geht z. B. die Gleichung der isogonalen Trajectorien der Kreisschaar

$$R = ck^{\Theta},$$

also der logarithmischen Spiralen, über in

$$p_1 p_2 = c \cdot k^{\vartheta_1 + \vartheta_2},$$

welches die Gleichung der isogonalen Trajectorien der confocalen Lemniscaten ist. Dieselben befolgen also das Gesetz, *dass das Produkt der Radii vectores geometrisch zunimmt, wenn die Summe ihrer Neigungswinkel sich arithmetisch ändert.*

Kennt man von einer solchen transscendenten Curve neben den zu Grunde liegenden Brennpunkten nur zwei Punkte, so kann man unendlich viele Punkte der Curve elementar construiren. Es ist nur nöthig, die Rechteckseintheilung der Ebene bis ins Kleinste durchzuführen.

§ 51. Andere Lemniscatenschaaren nebst ihren isogonalen Trajectorien.

Da allen Kreisen der Z-Ebene in der z-Ebene Lemniscaten entsprechen, so entspricht jedem Kreisbüschel durch zwei Punkte der ersteren ein Lemniscatenbüschel durch zwei Punktpaare der letzteren, der Orthogonalschaar von Kreisen hingegen eine Orthogonalschaar von Lemniscaten.

Die Gleichungen der beiden Kreisschaaren sind aber:

$$\Phi - X = \gamma \quad \text{und} \quad \lg \frac{P}{Q} = c,$$

wobei $a_1 + b_1 i$ und $a_2 + b_2 i$ die Ausgangspunkte der Radii vectores sein mögen. Ihnen entsprechen folgende Gleichungen der beiden Lemniscatenschaaren:

12) $$(\varphi_1 + \varphi_2) - (\chi_1 + \chi_2) = \gamma$$

und

13) $$\lg \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2} = c,$$

oder einfacher

$$\frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2} = c_1,$$

wobei die Radii vectores p_1 und p_2 von dem Punktpaare $\sqrt{a_1 + b_1 i}$, die Radii vectores q_1 und q_2 von dem Punktpaare $\sqrt{a_2 + b_2 i}$ ausgehen, während φ_1, φ_2, χ_1 und χ_2 die entsprechenden Neigungen sind.

Man hat also folgenden Satz: *Gehen von den Ecken eines Parallelogramms Radii vectores p_1, p_2, q_1 und q_2 aus, und zwar von den Gegenecken gleichnamige, so ist der geometrische Ort für das constante Verhältniss der Produkte $p_1 p_2$ und $q_1 q_2$ eine Lemniscate. Sind φ_1, φ_2, χ_1 und χ_2 die entsprechenden Neigungswinkel, so ist der geometrische Ort für die constante Differenz der Summen $(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $(\chi_1 + \chi_2)$ eine zur vorigen orthogonale Lemniscate.*

Da $\frac{P}{Q} = 1$ eine Gerade ist, so ist $\frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2} = 1$ eine gleichseitige Hyperbel, da auch $\Phi - X = 0$ resp. 180^0 eine Gerade ist, so ist $(\varphi_1 + \varphi_2) - (\chi_1 + \chi_2) = 0$ resp. 180^0 gleichfalls eine gleichseitige Hyperbel. Beide Hyperbeln entsprechen den Potenzlinien der Kreisschaaren. Man kann sie als Potenzhyperbeln bezeichnen.

Setzt man in Gleichung 12) und 13) Cartesische Coordinaten ein, wobei die Wahl des Nullpunktes ganz gleichgültig ist, ebenso wie die Richtung der reellen Axe, so genügen die linken Seiten der Differentialgleichung $\Delta u = 0$.

Durch Figur 30 sind diese beiden Lemniscatenschaaren dargestellt, und zwar ist die quadratische Eintheilung der Ebene gegeben. Der Satz $(\varphi_1 + \varphi_2) - (\chi_1 + \chi_2) = \gamma$ entspricht ganz dem vom constanten Peripheriewinkel, denn $\Phi - X$ ist ein solcher. Schreibt man statt des Obigen $(\varphi_1 - \chi_1) - (\varphi_2 - \chi_2) = \gamma$, so findet man, dass die Klammern Peripheriewinkel der Lemniscate darstellen, die über zwei Parallelseiten des Parallelogramms in Fig. 30 stehen. An Stelle des constanten Peripheriewinkels beim Kreise tritt also die constante Differenz zweier Peripheriewinkel bei der Lemniscate.

Die elektrodynamische Deutung der Figur 30 ist sehr einfach: Macht man zwei Gegenecken des Parallelogramms zu positiven, die beiden andern Gegenecken zu negativen Elektroden, durch welche Elektricität in eine unendliche Platte ein- resp. ausströmt, so sind die Lemniscaten der Schaar Linien constanter elektrischer Span-

nung, die des Büschels sind Stromlinien der Elektricität.*) Längs einer Büschellemniscate kann man die Platte ausschneiden, ohne dass sich der Zustand ändert. Die sonstigen elektrodynamischen, ebenso die isothermischen und hydrodynamischen Deutungen der Figur wird der Leser leicht selbst aufstellen.

Auf Figur 31 ist der Specialfall des Quadrates (an Stelle des Parallelogramms) behandelt, auf den wir bei späterer Gelegenheit zurückkommen. Der schattirte Theil stellt den stationären Zustand einer Kreisscheibe dar, in welche in den Punkten ± 1 Elektricität ein-, in den Punkten $\pm i$ ausströmt.

Geht das Kreisbüschel der Z-Ebene durch den Nullpunkt und einen Punkt $a + bi$, so geht das Lemniscatenbüschel durch den Nullpunkt und das Punktpaar $\sqrt{a + bi}$, d. h. man erhält ein Büschel der gewöhnlichen Schleifenlemniscaten. Die Gleichung desselben lautet

$$\vartheta + \vartheta_1 - 2\chi = \gamma, \tag{14}$$

die der orthogonalen Lemniscatenschaar hingegen

$$\frac{p \cdot p_1}{q^2} = c. \tag{15}$$

Figur 32 stellt die quadratische Eintheilung der Ebene mittels dieser Curvenschaaren dar. Eine elektrodynamische Deutung ist z. B. die, dass zwei positive und eine negative Elektrode, letztere im Nullpunkte, vorhanden sind. Die Quantität der in letzterem ausströmenden Elektricität ist doppelt so gross als die, welche in jedem der beiden anderen Punkte eingeleitet wird. Hierin liegt ein Specialfall zu einem später abzuleitenden elektrodynamischen Gesetze.

Für die symmetrisch gegen die reelle Axe liegende Schleifenlemniscate dieser Figur hat man die Gleichung

$$\vartheta + \vartheta_1 - 2\chi = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$\sin[\vartheta + \vartheta_1 - 2\chi] = 1,$$

während die Gleichung der Hyperbel dieser Figur lautet:

$$\frac{p \cdot p_1}{q^2} = 1.$$

*) Ich verdanke der Güte des Herrn Dr. Guébhard zu Paris den Besitz zweier Platten, auf denen die Figur 30 auf elektrochemischem Wege durch Nobili'sche Farbenringe mit ausserordentlicher Genauigkeit reproducirt ist. Man vergleiche dessen Abhandlungen im Électricien von 1882, in den Comptes Rendus der Académie des Sciences und in den Bulletins de la Société de Physique desselben Jahres.

Auf entsprechende Analogien in der Kreisverwandtschaft braucht nur hingedeutet zu werden.

Andere Specialfälle, z. B. diejenigen, wo die vier Eckpunkte des Parallelogramms auf der Geraden gruppirt werden, sind leicht durchzuführen.

Nach § 19 haben die isogonalen Trajektorien des Kreisbüschels die Gleichung

$$\frac{P}{Q} = ck^{\Phi - X}.$$

Die entsprechenden Trajectorien des allgemeinen Lemniscatenbüschels 12 haben also die leicht zu deutende Gleichung

16) $$\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} = ck^{(\varphi_1+\varphi_2)-(\chi_1+\chi_2)}.$$

Für den Specialfall 14 lautet die Trajectoriengleichung

$$\frac{p_1 p_2}{Q^2} = ck^{\varphi_1+\varphi_2-2\chi}.$$

Auch die Trajectoriengruppen lassen die entsprechenden physikalischen Anwendungen zu, nur handelt es sich nicht um Punkt-, sondern um Linien-Elektroden. Hat man zwei Individua des Kreisbüschels und zwei der Kreisschaar, so kann man die ähnliche Rechteckseintheilung des Ebenenelementes bis ins Kleinste durchführen. Dasselbe gilt von der lemniscatischen Eintheilung. Hat man also ausser den Brennpunkten zwei Punkte einer transscendenten Curve von der durch Gleichung 16) dargestellten Art, so kann man unendlich viele Punkte derselben elementar construiren. Zahlreiche Eigenschaften aller hier behandelten Curven lassen sich ohne jede Schwierigkeit aussprechen. Halbirung der Ebene durch eine den Nullpunkt passirende Gerade und die schon besprochene Formirung eines gewissen Kegels giebt Coordinatensysteme und Sätze für die Oberfläche desselben, und gleichzeitig werden physikalische Probleme gelöst, die der Verallgemeinerung auf alle Kegelflächen fähig sind. Figur 30 z. B. führt auf die Strom- und Spannungscurven eines gewissen Kegels, bei dem in einem Mantelpunkte Elektricität ein-, in einem beliebigen andern ausströmt.

§ 52. Einige Sätze über die behandelten Curvensysteme.

1) Die Mittelpunkte des Kreisbüschels resp. der Kreisschaar liegen auf einer Geraden, die zur orthogonalen Kreisschaar gehört, folglich: *Die Brennpunkte des Lemniscatenbüschels durch zwei Punktpaare liegen auf einer orthogonalen gleichseitigen Hyperbel, die der Lemniscatenschaar gleichfalls.*

2) Spiegelung des Nullpunktes gegen die verschiedenen Individua eines beliebigen Strahlenbüschels giebt einen durch den Nullpunkt gehenden Kreis, die Fusspunkte der Lothe vom Nullpunkte nach dem Strahlenbüschel geben ebenfalls einen solchen Kreis. Nun war in § 49 bemerkt, dass der Linie $X = a$ eine Hyperbel mit den Scheitelpunkten $\sqrt{a}$ und den Brennpunkten $\sqrt{2a}$ entspricht, letztere also dem Spiegelpunkte des Nullpunktes gegen die Gerade correspondiren. Nach dem Satze von der Drehung folgt also:

Die Brennpunkte des Hyperbelbüschels liegen auf der durch den Nullpunkt gehenden orthogonalen Lemniscate, die Scheitelpunkte liegen auf einer ähnlichen Lemniscate.

3) Inversion des Strahlenbüschels durch $a + bi$ nebst concentrischer Kreisschaar gegen den Einheitskreis um den Nullpunkt giebt ein Kreisbüschel durch den Punkt $\frac{1}{a+bi}$ und den Nullpunkt. Folglich: *Inversion des gleichseitigen Hyperbelbüschels durch das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ und der zugehörigen confocalen Lemniscatenschaar gegen den Einheitskreis giebt ein Büschel von Schleifenlemniscaten durch das Punktpaar $\sqrt{\frac{1}{a+bi}}$ und den Nullpunkt nebst orthogonaler Lesmniscatenschaar.* Die Figuren 29 und 32 sind also reciprok. Die Verallgemeinerung für beliebig grosse Kreise giebt nichts Neues.

4) Durch Inversion gegen einen Kreis um den Nullpunkt geht jedes Kreisbüschel nebst orthogonaler Kreisschaar wieder in ein solches über. Folglich: *Inversion gegen einen Kreis um den Nullpunkt verwandelt jedes Lemniscatenbüschel durch Punktpaare $\sqrt{a+bi}$ und $\sqrt{a_1+b_1 i}$ nebst orthogonaler Lemniscatenschaar wiederum in solche Curvenschaaren mit Büschelpunkten, die den gegebenen reciprok sind.*

5) Die Sätze 3) und 4) über die Erhaltung der Lemniscaten lassen sich auch auf ihre Trajectorien ausdehnen, d. h. auch diese behalten ihren Charakter bei.

Man versuche diese Sätze auch analytisch nachzuweisen, indem man zeigt, dass die Gleichungen der behandelten Curvensysteme ihre Gestalt bei den Transformationen beibehalten.

6) Die Reihen von Berührungskreisen, die einem Winkel eingeschrieben sind, haben ihre Berührungspunkte auf der Winkelhalbirenden; sind sie einem concentrischen Kreisringe eingeschrieben, so liegen die Berührungspunkte auf dem isothermisch halbirenden Kreise; war der Kreisring excentrisch, so war Aehnliches der

Fall, etc. *Allen Sätzen über solche Kreisreihen, besonders auch den Schliessungsproblemen des* § 18, *entsprechen Sätze über Reihen von Lemniscaten, die einem Streifen oder Ringe oder einer Sichel eingeschrieben sind, die von gleichseitigen Hyperbeln oder Lemniscaten begrenzt werden; nur müssen alle diese Curven dasselbe Centrum haben.*

Aehnliches gilt von den Schliessungsproblemen, die Jacobi im 3. Bande des Crelle'schen Journals mit dem Additionstheorem der elliptischen Functionen in Verbindung gebracht hat.

Auch die Sätze über Kreisreihen in dem Ringe zwischen logarithmischen Spiralen und Doppelspiralen lassen sich auf berührende Lemniscatenreihen zwischen den Trajectorien der Lemniscatenbüschel ausdehnen.

§ 53. Die lemniscatische Geometrie und Kinematik.

Man erkennt aus den vorigen Abschnitten, dass die Geometrie des Kreises und der Geraden sich mit Hülfe der Abbildung $z = \sqrt{Z}$ elementar aus der Z-Ebene in die z-Ebene übertragen lässt, wenigstens soweit es sich um die Geometrie der Lage und um longimetrische Relationen handelt. (Sätze über Flächeninhalte lassen zwar Deutungen zu, dieselben sind aber unbequem in Worte zu kleiden.) Jedem Satze und jeder Construction entspricht ein gewisser Satz oder eine Construction, wobei an Stelle der Worte Gerade und Kreis die Worte gleichseitige Hyperbel und Lemniscate treten, nur haben diese Curven sämmtlich ein gemeinschaftliches Centrum. Ein Beispiel mag dies erläutern:

Die Winkelhalbirenden des Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem Centrum des eingeschriebenen Kreises, folglich: die gleichseitigen Hyperbeln, welche die Winkel des Hyperbeldreiecks halbiren, schneiden sich in einem Punkte, der ein Brennpunkt der eingeschriebenen Lemniscate ist.

Sind ferner P, Q, R, S Punkte einer Geraden, p, q, r, s ihre Entfernungen von einem ihrer Punkte $a + bi$, das Doppelverhältniss also

$$\frac{r-p}{r-q} \cdot \frac{s-p}{s-q} = K,$$

so gehen diese Punkte in vier Punktpaare auf gleichseitiger Hyperbel über, auf der auch das Punktpaar $\sqrt{a+bi}$ liegt. Zieht man von diesem aus Radii vectores nach den vier Punktpaaren, so wird das lesmniscatische Doppelverhältniss

$$\frac{r_1 r_2 - p_1 p_2}{r_1 r_2 - q_1 q_2} \cdot \frac{s_1 s_2 - q_1 q_2}{s_1 s_2 - p_1 p_2}$$

denselben Werth K haben.

Ebenso geht das Doppelverhältniss von vier Strahlen

$$\frac{\sin(ac)\sin(bd)}{\sin(bc)\sin(ad)} = K_1$$

über in das lemniscatische Doppelverhältniss

$$\frac{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\alpha+\alpha_1)]\cdot\sin[(\delta+\delta_1)-(\beta+\beta_1)]}{\sin[(\gamma+\gamma_1)-(\beta+\beta_1)]\cdot\sin[(\delta+\delta_1)-(\alpha+\alpha_1)]} = K_1.$$

Gerade die Sätze über projectivische Punktreihen und Strahlenbüschel sind demnach leichter Uebertragung fähig. Ausführlicheres findet man in des Verfassers Abhandlung über diese als *lemniscatische* bezeichnete Geometrie im 21. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Wie man durch die Durchschnittspunkte entsprechender Elemente zweier projectivischen Strahlenbündel, ebenso durch die Verbindungslinien entsprechender Elemente projectivischer Punktreihen die Kegelschnitte definiren kann, so kann man mittels lemniscatisch projectivischer Hyperbelbüschel desselben Centrums resp. solcher Punktreihen auf gleichseitigen Hyperbeln Curven definiren, deren Gleichungen sich auf die Formen

$$p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 = c_1 \quad \text{(der Ellipse entsprechend)},$$
$$p_1 p_2 - q_1 q_2 = c_1 \quad \text{(der Hyperbel entsprechend)},$$
$$p_1 p_2 \cos^2 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} = \frac{P}{4} \quad \text{(der Parabel entsprechend)},$$

reduciren lassen. Man könnte dieselben als *„lemniscatische Kegelschnitte"* bezeichnen.

Setzt man z. B. als bekannt voraus, dass bei Einströmung der Elektricität in eine unbegrenzte ebene Platte mittels einer endlichen, geradlinigen Elektrode, sobald die Ableitung im unendlichen Bereiche geschieht, die Spannungscurven für den stationären Zustand confocale Ellipsen (mit den Endpunkten der Geraden als Brennpunkten), die Stromlinien confocale Hyperbeln sind, so kann man mittels der Abbildung $z = \sqrt{Z}$ folgendes Problem lösen: Die Elektricität ströme ein durch zwei Elektroden, die gleiche und entgegengesetzte Theile einer gleichseitigen Hyperbel sind (im speciellen Falle zwei gerade Linien gleicher Länge, die Theile derselben Geraden sind, oder ein symmetrisches Kreuz aus zwei Geraden), während die Ableitung im unendlichen Bereiche geschieht. Welches ist die Gestalt der Spannungscurven und Stromlinien? Offenbar werden dieselben durch die beiden ersten Gleichungen der

letztbesprochenen Gruppe dargestellt. Auch das entsprechende Parabelproblem lässt sich leicht aufstellen.

Im 21. Bande der genannten Zeitschrift ist auch gezeigt, wie die Bewegung von starren Systemen in der Z-Ebene in eine Bewegung lemniscatisch veränderlicher Systeme in der z-Ebene übertragen werden kann. Es ist z. B. klar, dass der Rotation der Z-Ebene um einen Punkt $a + bi$ eine Bewegung der z-Ebene entspricht, bei welcher alle Punkte sich auf Lemniscaten mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{a + bi}$ bewegen, mit andern Worten: diese Lemniscaten sind der betrachteten Bewegung in sich selbst gleitende Curven. Das gleichseitige Hyperbelbüschel dreht sich dabei unter steter Gestaltveränderung um das genannte Punktpaar. Die Bewegung entspricht etwa der Erscheinung an optisch zweiaxigen Krystallen, welche eintritt, wenn man das analysirende Nicol'sche Prisma oder das Krystallblättchen in seiner Ebene dreht. Auch die Parallelverschiebung des starren Systems, das ähnliche Anschwellen eines veränderlichen Systems und Combinationen dieser Bewegungen lassen sich in mehr oder weniger interessanter Weise deuten, nachdem man sie in die z-Ebene übertragen hat. *Die Geschwindigkeiten ergeben sich dabei aus den absoluten Beträgen der Differentialquotienten.* Der Verfasser hat diese Theorie als die der *lemniscatischen Kinematik* bezeichnet. Mit den besprochenen hydrodynamischen Bewegungen hat dieselbe insofern nichts zu thun, als bei denselben die Geschwindigkeiten proportional dem *reciproken* Werthe des Differentialquotienten sind.

§ 54. Lemniscatische Reciprocität und Verwandtschaft.

Die Operation, welche bei der Abbildung $z = \sqrt{Z}$ der Inversion mittels eines Kreises der Z-Ebene entspricht, lässt sich zweckmässig als *isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate* bezeichnen. Wie bei der Inversion Kreise in Kreise übergehen, so gehen bei der entsprechenden Operation Lemniscaten desselben Centrums in ebensolche Lemniscaten über. Ein Specialfall ist die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel, welche der Spiegelung gegen eine Gerade entspricht. Wie die Inversion ein Specialfall der Kreisverwandtschaft ist, so ist die Spiegelung gegen die Lemniscate ein Specialfall der allgemeinen *lemniscatischen Verwandtschaft.* Eine Idee von letzterer kann man sich folgendermassen machen: Zwei Ebenen mögen in Kreisverwandtschaft stehen, jede unterwerfe man der Abbildung $z = \sqrt{Z}$, dann stehen die beiden andern Ebenen in lemniscatischer Verwandtschaft. Allgemein kann

man die letztere folgendermassen definiren: Stehen zwei Ebenen in einer solchen Beziehung, dass jedem auf dasselbe Centrum bezogenen Punktpaare der einen, ein und nur ein Punktpaar der anderen entspricht, und dass je vier Punktpaaren der einen, die auf einer der zu jenem Centrum gehörigen Lemniscate liegen, jedesmal vier Punktpaare der andern entsprechen, die gleichfalls auf einer solchen Lemniscate liegen, dann ist diese Beziehung eine lemniscatische Verwandtschaft.

Da bei der Inversion Conformität und involutorisches Verhalten stattfindet, so gilt dasselbe von der entsprechenden speciellen lemniscatischen Verwandtschaft. Sie gehört also zu den isogonalen und zugleich involutorischen Beziehungen. Wie sich ferner jede Kreisverwandtschaft im Wesentlichen auf eine Inversion reduciren lässt, so lässt sich jede lemniscatische Verwandtschaft im Wesentlichen auf eine Spiegelung gegen eine Lemniscate reduciren. Nur dieser letztere Specialfall soll hier behandelt werden. Da ferner die Reciprocität sich am bequemsten formuliren lässt, wenn man den Kreisradius gleich 1 setzt, so soll hier der Einfachheit halber die Spiegelung gegen die Lemniscate $p_1 \cdot p_2 = 1$ geschehen. Die Entfernung der Brennpunkte vom Nullpunkte sei dabei $\sqrt{e}$, wo e reell, aber sonst beliebig ist. Die Allgemeinheit wird dadurch nicht beschränkt, denn alle lemniscatischen Gestaltungen kommen dabei zur Geltung. Die entsprechenden Sätze können tabellarisch nebeneinander gestellt werden. Natürlich ist der Punkt e das Centrum des spiegelnden Kreises der Z-Ebene.

Inversion.	*Lemniscatische Spiegelung.*
1) Jeder concentrische Kreis mit Radius $r = c$ geht über in einen concentrischen mit Radius $\frac{1}{c}$.	1) Jede confocale Lemniscate $p_1 p_2 = c$ geht über in eine confocale mit der Gleichung $p_1 p_2 = \frac{1}{c}$.
2) Jeder Radius der concentrischen Kreisschaar erzeugt sich selbst wieder.	2) Jede Orthogonalhyperbel der confocalen Lemniscatenschaar erzeugt sich selbst wieder.
3) Die Verwandtschaft ist eindeutig. Unendlicher Punkt und Centrum entsprechen einander. Die Abbildung lässt sich elementar durchführen. Die Beziehung ist eine conforme.	3) Die Verwandtschaft ist zweideutig, kann jedoch durch Beschränkung auf eine Halbebene als eindeutig aufgefasst werden. Unendlicher Punkt und die Brennpunkte entsprechen einander. Die Abbildung lässt sich elementar

4) Jeder beliebige Kreis geht in einen Kreis über. Das Inversionscentrum ist Aehnlichkeitspunkt für sich entsprechende Kreise, und zwar äusserer, wenn es ausserhalb beider Kreise liegt, innerer, wenn es innerhalb liegt.

5) Jeder Kreis mit Radius $\varrho = c$, in Bezug auf den das abbildende Centrum die Potenz t^2 hat, geht über in einen Kreis mit Radius $\varrho_1 = \frac{c}{t^2}$, in Bezug auf den jene Potenz $\frac{1}{t^2}$ ist.

6) Die Mittelpunkte beider Kreise entsprechen einander im Allgemeinen nicht. Hat der eine vom abbildenden Centrum die Entfernung k, so ist die des andern $\frac{k}{t^2}$. Beide liegen auf einer durch das Inversionscentrum gehenden Geraden.

7) Schneidet der eine Kreis den Inversionskreis unter α, so schneidet der transformirte Kreis den letzteren unter $-\alpha$. Orthogonal-Kreise gehen in sich selbst über.

8) Gerade werden Kreise, die durch das Inversionscentrum gehen, und umgekehrt.

9) Das Kreisbüschel durch die

durchführen. Die Beziehung ist eine conforme.

4) Jede Lemniscate desselben Centrums geht in eine Lemniscate über. Die Inversionsbrennpunkte sind Durchschnittspunkte für gewisse leicht zu definirende gleichseitige Hyperbeln, die mit den sich entsprechenden Lemniscaten in Beziehung stehen.

5) Jede Lemniscate $p_1 p_2 = c$, für welche die lemniscatische Potenz der abbildenden Brennpunkte $p_1^2 . p_2^2 = t^2$ ist [z. B. ist für den Berührungspunkt einer der Aehnlichkeitshyperbeln unter 4) $p_1 . p_2 = t$] geht über in eine Lemniscate $q_1 q_2 = \frac{c}{t^2}$, in Bezug auf welche jene Potenz $p_1^2 . p_2^2 = \frac{1}{t^2}$ ist.

6) Die Brennpunkte beider Lemniscaten entsprechen einander im Allgemeinen nicht. Ist für die einen, von den Inversions-Brennpunkten aus gerechnet, $p_1 . p_2 = k$, so ist für die andern $p_1 p_2 = \frac{k}{t^2}$. Beide Paare liegen auf einer durch die Inversions-Brennpunkte gehenden gleichseitigen Hyperbel.

7) Schneidet die eine Lemniscate die abbildende unter α, so schneidet die transformirte sie unter $-\alpha$. Orthogonale Lemniscaten gehen in sich selbst über.

8) Gleichseitige Hyperbeln werden Lemniscaten, die durch die Abbildungs-Brennpunkte gehen, und umgekehrt.

9) Das Lemniscatenbüschel

Punkte ϱ, φ und ϱ_1, φ_1 (von e aus gerechnet) geht über in das Kreisbüschel durch $\frac{1}{r}$, φ und $\frac{1}{r_1}$, φ_1. Die Orthogonalschaar des ersteren wird die des letzteren. Dasselbe gilt von den isogonalen Trajectorien. In einem Specialfalle entsteht ein Strahlenbüschel.

10) Die Reciprocität gegen den Kreis mit Radius $r = 1$ um den Punkt $a + bi$ ist, abgesehen vom Umklappen um die reelle Axe, identisch mit der Abbildung

$$Z = a + bi + \frac{1}{z - (a + bi)}.$$

11) Die Spiegelung gegen den Kreis mit Radius $r = c$ um $a + bi$ ist im Wesentlichen identisch mit der Abbildung

$$Z = a + bi + \frac{c^2}{z - (a + bi)}.$$

12) Die Spiegelung gegen die verticale Gerade $x = a$ ist im Wesentlichen identisch mit der Transformation

$$Z = 2a - z.$$

13) Bei dieser Spiegelung bleibt der Radius des gespiegelten Krei-

durch die Punktpaare $p_1 p_2 = r$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \varphi$ und $p_1 p_2 = r_1$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \varphi_1$ geht über in das Lemniscatenbüschel durch die Punktpaare $p_1 p_2 = \frac{1}{r}$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \varphi$ und $p_1 p_2 = \frac{1}{r_1}$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \varphi_1$. Die orthogonale Lemniscatenschaar des ersteren wird die des letzteren. Dasselbe gilt von den isogonalen Trajectorien. In einem Specialfalle entsteht ein Hyperbelbüschel.

10) Die isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate $p_1 . p_2 = 1$ um das Punktpaar $\sqrt{a + bi}$ ist im Wesentlichen identisch mit der Abbildung

$$Z = \sqrt{a + bi + \frac{1}{z^2 - (a + bi)}}$$

(für die Schleifenlemniscate um $1 \pm$ also $Z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}$).

11) Die Spiegelung gegen die Lemniscate $p_1 . p_2 = c$ um $\sqrt{a + bi}$ reducirt sich auf die Abbildung

$$Z = \sqrt{a + bi + \frac{c^2}{z^2 - (a + bi)}}.$$

12) Die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel durch das Punktpaar $\sqrt{a}$ mit den Brennpunkten $\sqrt{2a}$ wird repräsentirt durch die Function

$$Z = \sqrt{2a - z^2}.$$

Sind z. B. die Brennpunkte ± 1, so ist die abbildende Function

$$Z = \sqrt{1 - z^2}.$$

13) Bei dieser Spiegelung bleibt der Parameter $p_1 . p_2$ ungeändert.

ses ungeändert. Geometrisch kann die Operation durchgeführt werden durch Lothe, die um sich selbst verlängert werden. — Gerade gehen in Gerade über.

14) Die Aufgabe, den Raum zwischen zwei sich nicht schneidenden Kreisen in einen concentrischen Kreisring zu verwandeln, hat folgende geometrische Lösung: Man construire die Potenzlinie beider Kreise, schlage um einen beliebigen Punkt derselben einen Orthogonalkreis und nehme einen der Durchschnitte desselben mit der Centrale der gegebenen Kreise zum Centrum der Transformation durch reciproke Radii vectores. Der Radius des spiegelnden Kreises ist beliebig. Von der Wahl des Büschelpunktes hängt es ab, welcher Kreis der innere wird.

15) Diese Transformation (und überhaupt jede Kreisverwandtschaft) lässt sich reduciren auf die Abbildung durch eine Function von der Form

$$Z = \frac{as + b}{cs + d}.$$

16) Inversion gegen einen Kreis verwandelt ein Viereck mit den Seiten p, q, r, s in ein Bogenviereck, dessen Sehnen die Längen p_1, q_1, r_1, s_1 haben mögen. Dabei sind die Doppelverhältnisse $\frac{pr}{qs}$ und $\frac{p_1 r_1}{q_1 s_1}$ gleich.

Der Brennpunkt λ geht in $\sqrt{1-\lambda^2}$ über. Die Spiegelung kann vollführt werden durch Orthogonalhyperbeln, die um correspondirende Bogen verlängert werden. Gleichseitige Hyperbeln gehen wieder in solche über.

14) Die Aufgabe, den Raum zwischen zwei beliebigen, sich nicht schneidenden Lemniscaten in einen confocalen Lemniscatenring zu verwandeln, hat also folgende Lösung: Man construire die „Potenzhyperbel" beider Lemniscaten, lege um ein beliebiges Punktpaar derselben eine orthogonale Lemniscate und mache ein Durchschnitts-Punktpaar derselben mit der Centralhyperbel zu Brennpunkten der spiegelnden Lemniscate, deren Parameter beliebig ist. Von der Wahl des Durchschnitts-Punktpaares hängt es ab, welche Lemniscate die innere wird.

15) Diese Transformation lässt sich reduciren auf die Abbildung durch eine Function von der Form $Z = \sqrt{\frac{as^2 + b}{cs^2 + d}}$, der noch eine additive Constante hinzugefügt werden kann.

16) Die Punktpaare A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1 mögen ein Viereckspaar bilden, in welchem die Entfernungen A_1B_1 und A_2B_1 mit p_1 und p_2, die Entfernungen A_1D_1 und A_2D_1 mit s_1 und s_2, C_1B_1 und C_2B_1 mit q_1 und q_2, C_1D_1 und C_2D_1 mit r_1 und r_2 bezeichnet werden mögen. Das lemniscatische Dop-

pelverhältniss ist dann

$$\frac{(p_1 \cdot p_2)(r_1 \cdot r_2)}{(q_1 \cdot q_2)(s_1 \cdot s_2)}.$$

Spiegelt sich dieses Viereckspaar gegen eine Lemniscate desselben Centrums, so bleibt für das neue Doppelviereck das lemniscatische Doppelverhältniss constant. [An Stelle des Doppelverhältnisses der Kreisverwandtschaft ist gewissermassen ein Quadrupel-Verhältniss getreten.

16) Der entsprechende Satz für die Doppelwinkel ergiebt sich folgendermassen: Die Neigungen der eben besprochenen Radii vectores $p_1 q_1 r_1 s_1$, $p_2 q_2 r_2 s_2$ seien $\varphi_1 \chi_1 \psi_1 \omega_1$, $\varphi_2 \chi_2 \psi_2 \omega_2$. Der lemniscatische Doppelwinkel ist dann

$$(\varphi_1 + \varphi_2) - (\chi_1 + \chi_2) + (\psi_1 + \psi_2) - (\omega_1 + \omega_2)$$

an Stelle des Doppelwinkels der Kreisverwandtschaft, welche für das einfache Viereck war $(\varphi - \chi) + (\psi - \omega)$. *Spiegelt sich nun das Doppelviereck gegen eine Lemniscate desselben Centrums, so bleibt der neue lemniscatische Doppelwinkel von derselben Grösse wie vorher.* —

Man erkennt aus diesen Beispielen, *dass die lemniscatische Verwandtschaft ebenso vollständig durchgeführt werden kann, wie die Kreisverwandtschaft.* Sie ist die erste mehrdeutige isogonale Verwandtschaft, welche wirklich durchgeführt worden ist. Desshalb erschien ein längeres Verweilen nothwendig. Im Uebrigen werde auf des Verfassers Abhandlung im 21. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik verwiesen. Als Uebungsbeispiel werde empfohlen das von Kirchhoff mit Hülfe der Inversion behandelte Problem, den stationären Zustand einer kreisförmigen Platte zu untersuchen, in welche in zwei beliebigen Punkten A und B Elektricität ein- und ausströmt, mit Hülfe der Abbildung $z = \sqrt{Z}$ auf eine lemniscatisch geformte Platte zu übertragen. An Stelle der dort angewendeten Inversion tritt dann die lemniscatische Spiegelung.

§ 55. Welche Curven entsprechen den Geraden und Kreisen der z-Ebene in der Z-Ebene?

Die hier zu behandelnden Probleme geben weniger elegante Resultate, als die früheren. Die bequemen Factorenzerlegungen,

welche vorher auf die Producte der Radii vectores und auf die Summe ihrer Neigungswinkel führten, fallen hier weg. Ausserdem sind häufig zwei Ebenen übereinander zu betrachten, in denen die Zeichnungen sich nicht decken. Wir beschränken uns daher auf das Nothwendigste, was sich sofort aus den Relationen des § 48 ablesen lässt.

Den Parallelen $x = a$ und $y = b$ der Z-Ebene entsprechen die Curvenschaaren

$$17) \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} = a \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}} = b$$

oder

$$18) \qquad \sqrt{R}\cos\frac{\Phi}{2} = a \quad \text{und} \quad \sqrt{R}\sin\frac{\Phi}{2} = b.$$

Dies sind aber Brennpunktsgleichungen *zweier Parabelschaaren*, von denen die erstere ihren Scheitel rechts, die andere links vom Brennpunkte hat, und zwar auf der reellen Axe. *Beide Schaaren sind orthogonal und in der Form 17) genügt die linke Seite ihrer Gleichung der partiellen Differentialgleichung* $\Delta u = 0$.

Aus dem Satze über Drehungen um den Nullpunkt folgt, dass überhaupt jeder irgendwie gerichteten Parallelenschaar der z-Ebene eine Parabelschaar der Z-Ebene entspricht. So entsprechen z. B. den orthogonalen Parallelen

$$x + Ay = Aa \quad \text{und} \quad y - Ax = b$$

die Parabelschaaren

$$19) \qquad \begin{cases} \sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} + A\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}} = Aa, \\ \sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}} - A\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} = b, \end{cases}$$

und die linken Seiten dieser Gleichungen genügen gleichfalls der partiellen Differentialgleichung.

Figur 33 stellt zwei solche Parabelschaaren dar. Ihre isogonalen Trajectorien sind nach Obigem wieder Parabelschaaren. Alle Parabeln der Figur sind ähnlich, und zwar ist der Nullpunkt der gemeinschaftliche Aehnlichkeitspunkt. Denkt man sich die eine Hälfte der reellen Axe als positive Elektrode, während die Ableitung der Elektricität im Unendlichen geschieht, so ist die eine Parabelschaar die der Spannungscurven, die andere die der Stromlinien. Auch verschiedene isothermische und hydrodynamische Deutungen der Figur sind leicht zu geben.

Dem Strahlenbüschel durch den Punkt $a + bi$, also den Linien

$$\arctan\frac{y-b}{x-a}=\gamma$$

entspricht das Parabelbüschel

$$20)\qquad \arctan\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}}-b}{\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}}-a}=\gamma.$$

In dieser Schreibweise wird der Differentialgleichung $\Delta u=0$ genügt. Einfacher kann man schreiben

$$20^*)\qquad \frac{\sqrt{R}\sin\frac{\Phi}{2}-b}{\sqrt{R}\cos\frac{\Phi}{2}-a}=\tan\gamma.$$

Die orthogonale Kreisschaar des Strahlenbüschels hingegen,

$$\tfrac{1}{2}\lg\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]=c,$$

geht über in die Curvenschaar

$$21)\quad \tfrac{1}{2}\lg\left[\left(\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}}-a\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}}-b\right)^2\right]=c,$$

oder 21^*)

$$R-2\sqrt{R}\left(a\cos\frac{\Phi}{2}+b\sin\frac{\Phi}{2}\right)+a^2+b^2=e^{2c}.$$

Letztere Gleichung ist ganz analog der Lemniscatengleichung

$$R^4-2R^2(a\cos 2\Phi+b\sin 2\Phi)+a^2+b^2=e^{2c},$$

denn an Stelle von R^2 ist lediglich $R^{\frac{1}{2}}$, an Stelle von 2Φ ist $\frac{\Phi}{2}$, getreten. Bezeichnet man die vorher behandelten Lemniscaten von einem höheren Gesichtspunkte aus als *Lemniscaten 2ter Ordnung*, so kann man die Curven 21) *Lemniscaten $\frac{1}{2}$ter Ordnung* nennen.

Die Gleichung vereinfacht sich, wenn man statt des Punktes $a+bi$ den Punkt a zu Grunde legt, was der Allgemeinheit nicht schadet. Man erhält dann die Gleichung

$$22)\qquad R-2\sqrt{R}\,a\cos\frac{\Phi}{2}=e^{2c}-a^2.$$

Es giebt einen eigenthümlichen Weg, die Natur dieser Curven zu untersuchen, indem man nämlich feststellt, was bei der Abbildung

$$Z=(z+a)^2 \quad\text{oder}\quad X+Yi=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)+a]^2$$

den Kreisen um den Nullpunkt entspricht. Zunächst ist dabei

$$23)\qquad \begin{cases} X=r^2\cos 2\varphi+2ar\cos\varphi+a^2\\ Y=r^2\sin 2\varphi+2ar\sin\varphi. \end{cases}$$

Hier betrachtet man φ als unabhängige Variabele, setzt für r den fraglichen Specialwerth $r = e^c$ als Parameter der aufzusuchenden Curven ein und berechnet die Coordinaten X und Y für jedes einzelne φ. Bekanntlich ist dies die Art, in der man die cyclischen Curven zu untersuchen pflegt, und die Vergleichung zeigt, dass es sich hier in der That um *verlängerte und verkürzte Epicycloiden* handelt, bei denen der rollende Kreis und der Basiskreis denselben Radius haben. Das System trägt den Namen der *Pascal'schen Schneckenlinien* (limaçons); da sich jedoch alle diese Curven um eine *Cardioide* gruppiren, würde der Name *cardioidische Curven* bezeichnender sein. Hier handelt es sich um ein *concentrisches* System der letzteren. Es ergiebt sich nämlich Folgendes:

Bei der Abbildung $Z = z^2$ entspricht dem Kreise mit Radius r um den reellen Punkt a der z-Ebene eine epicyclische Curve, deren Basiskreis den Punkt a^2 zum Centrum und, ebenso wie der Rollkreis, den Radius ar hat, während der vom Rollkreise geführte Punkt die Entfernung r^2 von dessen Centrum hat.

Ist $r = a$, d. h. passirt der Kreis der z-Ebene den Nullpunkt, so entsteht nach § 40 eine Curve, die im Nullpunkte einen *Rückkehrpunkt* hat, und dies ist eben die *Cardioide*. Setzt man in Gleichung 22) $r = e^c = a$ ein, so reducirt sie sich auf

$$24) \qquad R = 4a^2 \cos^2 \frac{\Phi}{2}.$$

Aus der Vergleichung mit Gl. 18) ergiebt sich, dass Cardioide und Parabel reciproke Curven sind. Hierin liegt ein Specialfall eines Satzes von Quetelet, nach dem jede caustique secondaire sich in einen Kegelschnitt verwandeln lässt.

In Figur 34 ist das System dieser Curven nebst dem orthogonalen Parabelbüschel dargestellt. Nur der innere Raum der Cardioide ist isothermisch eingetheilt worden. Die Eintheilung des äusseren Raumes würde zwei Riemann'sche Blätter erfordern, in denen die Zeichnungen sich nicht decken. In O sind beide Blätter als zusammenhängend zu denken. Strömt in das eine derselben bei A Elektricität ein, die im unendlichen Bereiche beider abgeleitet ist, so würde die Figur die Spannungs- und Strömungslinien darstellen, wenn nicht eben das Modell eine Unmöglichkeit verlangte, nämlich das Durchkreuzen zweier Blätter ohne Zusammenhang.

Denkt man sich dagegen Figur 34 als ein einfaches Blatt, in welches bei A Elektricität einströmt, während sie am Rande der Cardioide abgeleitet wird, so lässt sich das Experiment realisiren.

Nun ist es selbstverständlich, dass jedem Kreisbüschel durch zwei Punkte $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ der z-Ebene nebst Orthogonal-

schaar *ein cardioidisches Büschel* durch $(a + bi)^2$ und $(a_1 + b_1 i)^2$ und eine *Orthogonalschaar cardioidischer Curven* entspricht. Da zu jedem Kreisbüschel ein Kreis durch den Nullpunkt, auch zur orthogonalen Schaar ein Kreis durch den Nullpunkt gehört, so gehört sowohl zum Büschel, wie zur Schaar der cardioidischen Curven eine wirkliche Cardioide mit Rückkehrpunkt. Der Rückkehrpunkt ist allen so entsprechenden Systemen cardioidischer Curven *gemeinsam* und spielt in dieser Verwandtschaft dieselbe Rolle, wie das gemeinschaftliche Centrum der verschiedenen Lemniscatensysteme in der Verwandtschaft $z = \sqrt{Z}$. Um die isothermischen Gleichungen aufzustellen, hat man nur die in § 48 gefundenen Cartesischen Werthe für x und y in die isothermischen Gleichungen für das Kreisbüschel und die Kreisschaar einzusetzen.

Unbequem ist es, dass die Gleichungen in beiden Blättern der Z-Ebene sich nicht decken. In gewissen Fällen geschieht letzteres dennoch, nämlich dann, wenn die Büschelpunkte der Kreise ein Punktpaar in Bezug auf den Nullpunkt sind, so dass die beiden Büschelpunkte der Cardioiden zusammenfallen. Ein solcher Fall ist in Figur 35 gezeichnet. Selbstverständlich gehört dann ein Kreis zum Büschel, gegen welchen Reciprocität stattfindet. Die Figur ist also leicht zu vervollständigen. Sie stellt z. B. die Strom- und Spannungscurven für den Fall dar, dass längs der positiven reellen Axe Elektricität einströmt, während die Ableitung im Punkte B geschieht. Längs einer Stromlinie, z. B. längs des Kreises, kann man sich die Platte ausgeschnitten denken, ohne dass sich etwas ändert. Figur 35 stellt also den stationären Zustand einer Kreisscheibe dar, in welche längs des Radius AC Elektricität einströmt, während die Ausströmung im Punkte B vor sich geht. Statt dessen kann die Einströmung auch längs BC, die Ableitung längs der Kreisperipherie geschehen.

Ist ferner einer der Kreisbüschelpunkte der Nullpunkt, so werden alle Büschelcurven der Z-Ebene wirkliche Cardioiden. Geht endlich die Potenzlinie des Kreisbüschels durch den Nullpunkt, wobei zur Orthogonalschaar ein Nullpunktkreis gehört, so entspricht ihm ein cardioidisches Büschel, welches eine Gerade als Symmetrieaxe enthält. Zur Orthogonalschaar desselben gehört dann ein Kreis um den Rückkehrpunkt des Systems.

Es lässt sich offenbar, wie eine lemniscatische, so auch eine *cardioidische Geometrie* vollständig durchführen, welche Sätze über Gerade, Kreise, Lemniscaten und gleichseitige Hyperbeln gemeinschaftlichen Centrums in Sätze über Parabeln, cardiodische Curven,

Kreise und Gerade verwandelt. Dabei offenbart sich mancher eigenthümliche Zusammenhang.

Der Figur der Z-Ebene z. B., welche zeigt, dass die Brennstrahlen der Parabel parallel der Axe reflectirt werden, entspricht eine Figur der z-Ebene, aus welcher entnommen werden kann, dass die Tangentenstücke der gleichseitigen Hyperbel zwischen den Asymptoten durch den Berührungspunkt halbirt sind.

Noch einige Sätze seien ohne Beweis angegeben: Inversion vom Rückkehrpunkte aus verwandelt jedes cardioidische Büschel nebst Schaar wieder in ein solches.

Der Ort, wo das Strahlenbüschel durch Null das confocale Parabelbüschel orthogonal schneidet, ist eine Cardioide. Dasselbe gilt von anderen constanten Winkeln.

Isothermische Spiegelung gegen die Cardioide verwandelt jedes cardioidische Büschel nebst Orthogonalschaar wieder in ein solches, nur muss der Rückkehrpunkt für die letzteren Systeme derselbe sein. Dies führt auf die cardioidische Verwandtschaft, die im Allgemeinen durch die Function

$$Z = \left(\frac{a\sqrt{z}+b}{c\sqrt{z}+d}\right)^2$$

repräsentirt wird.

Auch die physikalischen Deutungen der allgemeinen cardioidischen Büschel sind leicht zu geben. Hydrodynamisches findet man bereits in einer Abhandlung von Amstein: „Quelques exemples de représentation conforme avec leur application à un problème d'hydrodynamique“ in dem Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. XVI, p. 249; wo unter Anderem die Abbildung $z = 2Z - Z^2$ behandelt wird, die nicht wesentlich verschieden von $z = -(Z-1)^2$, also nahe verwandt mit der unsrigen ist.

§ 56. Litteratur.

1) In § 11 und 12 der Siebeck'schen Abhandlung in Bd. 55 des Crell. Journals wird die allgemeinere Abbildung

$$Z = a + bz + cz^2$$

behandelt. Einige geometrische und kinematische Sätze über die auftretenden Parabeln kommen dabei zur Sprache. Lemniscatisches wird nur angedeutet.

2) In Bd. 55 von Grunerts Archiv (Jahrg. 1873) befinden sich zwei Aufsätze von Wangerin, a) Ueber eine neue Abbildung einer Ebene auf eine andere, b) Ueber einige Eigenschaften der Lemniscaten. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um die Function

$Z = c\sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}}$. Von den Lemniscatenbüscheln kommen, wie sofort aus der Gestalt der Function folgt, diejenigen zur Sprache, deren Büschelpunkte auf einem Quadrate liegen. Ausserdem werden noch die der Figur 32 entsprechenden behandelt. Den *allgemeinen* Fall, bei dem die Büschelpunkte ein *Parallelogramm* bilden, ebenso die Allgemeingültigkeit der Sätze

$$\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} = c \quad \text{und} \quad (\vartheta_1 + \vartheta_2) - (\chi_1 + \chi_2) = \gamma,$$

findet man nicht dort, sondern zuerst in meiner Abhandlung über lemniscatische Geometrie im 21. Bd. der Zeitschr. für Mathem. und Phys. 1876, bei deren Abfassung mir übrigens die Arbeit des Herrn Wangerin noch nicht bekannt war. Das Referat, welches im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathem. VIII, S. 537 über meine Arbeit gegeben ist, beansprucht irrthümlich die Priorität der *allgemeinen* Sätze für Herrn Wangerin, während dieser Anspruch auf die genannten *Specialfälle* zu beschränken ist. Die letzteren kommen zur Anwendung in der XVIII. Preisschrift der Jablonowski'schen Gesellschaft: Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper. Leipzig, 1875.

3) Die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel hat Verfasser bereits in den „Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften", Bd. 18 der Zeitschr. für Mathem. und Physik eingehend behandelt, die Spiegelung gegen die allgemeinen Lemniscaten im Band 21 dieser Zeitschrift.

4) Isothermisches über die confocalen Lemniscaten findet man in den Leçons sur les coordonnées curvilignes von Lamé.

5) Specialfälle von Lemniscatenschaaren kommen in folgenden Abhandlungen elektrodynamischen Inhalts zur Sprache:

Smaasen, Pogg. Annalen, Bd. 69, S. 104 (1846).
Quincke, Pogg. Ann. Bd. 97, S. 182 (1856).
Auerbach, Wied. Ann. Bd. 3, S. 498 (1878).
Guébhard, Comptes Rendus, April 1880.
Guébhard, Electricien, 1880 u. 81. Méthode électrochimique.
Hildebrandt, Ueber stationäre elektr. Strömung. Inaug.-Diss. Göttingen, 1881.

6) Man vergleiche auch des Verfassers Abhandlung im 18. Bd. der Mathem. Annalen: „Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird." 1881.

Siebentes Capitel.

Verallgemeinerung der lemniscatischen Verwandtschaft. — Ein wichtiger Specialfall.

§ 57. Die ganze Function zweiten Grades.

Die Function

1) $$Z = cz^2 - 2c_1 z + c_{11},$$

deren Umkehrung ist

2) $$z = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + c(Z - c_{11})}}{c},$$

lässt sich schreiben

3) $$Z = c\left(z - \frac{c_1}{c}\right)^2 + \left[c_{11} - \left(\frac{c_1}{c}\right)^2\right].$$

Die entsprechende Abbildung ist nicht wesentlich verschieden von $Z = z^2$, denn der Zusatz $c_{11} - \left(\frac{c_1}{c}\right)^2$ bedeutet nur eine Verschiebung des durch $Z = c\left(z - \frac{c_1}{c}\right)^2$ transformirten Gebildes, und hier bedeutet der Factor c nur eine Drehung und Vergrösserung (resp. Verkleinerung) der durch $Z = \left(z - \frac{c_1}{c}\right)^2$ entstandenen Zeichnung. In letzterer Abbildung endlich bedeutet $\frac{c_1}{c}$ nur eine Verschiebung der Argumentebene vor der Transformation $Z = z^2$. Die Abbildung 1) bietet also nichts Neues und kann elementar durchgeführt werden. Dem Strahlenbüschel durch einen Punkt $a + bi$ der Z-Ebene und der orthogonalen concentrischen Kreisschaar entspricht ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte

4) $$z = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + c(a + bi - c_{11})}}{c}$$

nebst der zugehörigen Orthogonalschaar confocaler Lemniscaten um diese Punkte.

Auf der Mitte der Verbindungslinie dieser Brennpunkte liegt der dem Verzweigungspunkte entsprechende Punkt. Das Strahlenbüschel durch diesen und die zugehörige concentrische Kreisschaar entsprechen dem Strahlenbüschel und der concentrischen Kreisschaar durch resp. um den Verzweigungspunkt der Z-Ebene, nur werden die letzteren Kreise *doppelt* durchlaufen und die Winkel zwischen den Geraden sind doppelt so gross.

Um die Probe für diese Betrachtungen zu machen, untersuche man den Differentialquotienten

$$Z' = 2cz - 2c_{,},$$

der für $z = \frac{c_{,}}{c}$ verschwindet. Denselben Werth aber findet man durch Addition der beiden durch Gleichung 4) gegebenen Werthe, sobald man durch 2 dividirt. Einsetzung des Werthes giebt als Verzweigungspunkt der Z-Ebene $Z = c_{,,} - \frac{c_{,}^2}{c}$. Dasselbe Resultat ergiebt sich, wenn man untersucht, in welchem Punkte die Function 2) eindeutig wird, d. h. für welchen Werth von Z die Wurzel verschwindet.

Dass den Geraden der z-Ebene Parabeln mit dem Verzweigungspunkte als Brennpunkt entsprechen, während die Kreise in cardioidische Curvensysteme übergehen, für welche jener Punkt die Bedeutung eines Rückkehrpunktes hat, dies ergiebt sich mit allen hierher gehörigen Consequenzen aus den Betrachtungen des vorigen Capitels.

Die Theorie der vorliegenden Abbildung vollständig zu absolviren, kann demnach als leichte Uebungsaufgabe dem Leser überlassen bleiben.

§ 58. Eine weitere Verallgemeinerung.

Eine weitere Verallgemeinerung der lemniscatischen Verwandtschaft erhält man auf folgendem Wege:

Man denke sich eine Ebene $\zeta = \xi + \eta i$ durch die Functionen $\zeta = cz^2 + dz + e$ und $\zeta = c,Z^2 + d,Z + e,$ zur z- und Z-Ebene in Beziehung gesetzt, so dass den Geraden der ζ-Ebene in beiden anderen Ebenen gleichseitige Hyperbeln, den Kreisen aber Lemniscaten entsprechen. Zwischen der Z- und z-Ebene besteht also eine lemniscatische Verwandtschaft, und zwar eine derartige, dass die unendlichen Bereiche beider Ebenen einander entsprechen. Aus der Gleichung

$$c,Z^2 + d,Z + e, = cz^2 + dz + e$$

ergiebt sich als abbildende Function

$$5) \qquad Z = \frac{-d, + \sqrt{d,^2 + 4c,(cz^2 + dz + e - e,)}}{2c,}.$$

Um das gegenseitige Entsprechen der unendlichen Bereiche aufzuheben, unterwerfe man die ζ-Ebene zunächst der Transformation mittels der gebrochenen Function 1ten Grades, wobei Kreise im allgemeinen Kreise bleiben, d. h. man setze

$$\frac{k\zeta + l}{m\zeta + n} = cz^2 + dz + e,$$
$$\frac{k_1\zeta + l_1}{m_1\zeta + n_1} = c_1Z^2 + d_1Z + e_1,$$

berechne aus beiden Gleichungen ζ, setze die Resultate gleich und ermittele aus der letzten Gleichung die Function Z und ihre Umkehrung z. So ergiebt sich analytisch der allgemeinste Ausdruck für die lemniscatische Verwandtschaft. Analog lässt sich die cardioidische Verwandtschaft verallgemeinern. Statt der ersteren allgemeinen Aufgabe sei hier ein Specialfall behandelt.

§ 59. Die involutorische Abbildung $Z = \sqrt{1 - z^2}$.

Ein besonders wichtiger Specialfall der lemniscatischen Verwandtschaft ist die Abbildung $Z = \sqrt{1 - z^2}$, die schon in § 54 unter 12 erwähnt und als isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1 gedeutet wurde, bei welcher die Lemniscaten und gleichseitigen Hyperbeln mit dem Nullpunkte als Centrum erhalten bleiben. Diese Transformation giebt Resultate von allgemeinerem Interesse. Die Analogie mit der Formel $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$ lässt auf elegantere Ableitung mancher Sätze schliessen, worauf wir später zurückkommen.

Zunächst ist die Analyse der hierher gehörigen Riemann'schen Blätter durchzuführen. Nach Obigem steht zu vermuthen, dass die Z-Ebene zweiblättrig ist. Da aber aus $Z = \sqrt{1 - z^2}$ als Umkehrung $z = \sqrt{1 - Z^2}$ folgt, so muss auch die z-Ebene zweiblättrig sein. Die Windungspunkte ergeben sich durch die Betrachtung des Differentialquotienten $Z' = \frac{-z}{\sqrt{1 - z^2}}$. Derselbe verschwindet für $z = 0$, d. h. für $Z = \pm 1$. Beide Punkte sind Windungspunkte der Z-Ebene, wegen des involutorischen Charakters der Function aber auch solche der z-Ebene. In ihnen wird die Conformität gestört und jeder Winkel, der dort seinen Scheitel hat, im Vergleich zu dem entsprechenden der anderen Ebene verdoppelt.

Den Verzweigungsschnitt, längs dessen die beiden Blätter jeder Ebene sich ohne Zusammenhang durchkreuzen, kann man entweder in die gerade Verbindungslinie der Punkte ± 1 legen, oder mit Ausschliessung dieser Strecke in die unbegrenzte reelle Axe. Der verständlicheren Zeichnung halber wählen wir in Figur 36 a) und b) das letztere.

Da zum ersten Male ein complicirterer Zusammenhang an uns herantritt, mögen die angegebenen Verhältnisse schrittweise erledigt

werden. Bei der Abbildung $Z_{,} = s^2$ entsprechen sich die Quadranten nach der im vorigen Capitel erörterten Art und Weise, bei der Transformation $Z_{,,} = 1 - s^2$ also entspricht dem 1ten, 2ten, 3ten, 4ten Oktanten der s-Ebene der 3te, 4te, 1te und 2te Quadrant des oberen Blattes der $Z_{,,}$-Ebene, dem 5ten, 6ten, 7ten und 8ten Oktanten der ersteren der 3te, 4te, 1te und 2te Quadrant des unteren Blattes der $Z_{,,}$-Ebene, nur ist in letzterer der Punkt $+1$ zum Centrum der Quadranteneintheilung zu machen. Jetzt werde die $Z_{,,}$-Ebene der Abbildung $Z = \sqrt{Z_{,,}}$ unterworfen, also die s-Ebene der Abbildung $Z = \sqrt{1 - s^2}$. Dabei wird ihr Nullpunkt zum Windungspunkte 1ter Ordnung, alles übrige bleibt. Die Hilfsebene $Z_{,,}$ wird also 4-schichtig, so dass die mit ihr in Beziehung stehende s-Ebene zweischichtig wird, die Z-Ebene selbstverständlich gleichfalls zweischichtig. Die vier Quadranten um den Punkt $+1$ der $Z_{,,}$-Ebene werden zu 8 Räumen, die durch Gerade durch Null und die gleichseitige Hyperbel durch ± 1 symmetrisch abgegrenzt werden. Schliesslich hat man den durch Figur 36a. und b. dargestellten Zusammenhang. *Die Oktanten 1—8 des oberen Blattes der s-Ebene entsprechen den Theilen 1—8 der Z-Ebene, welche rechts von der imaginären Axe in den beiden Schichten liegen. Die Oktanten I. bis VIII. im Unterblatte der s-Ebene verwandeln sich in die Theile I. bis VIII. links von der imaginären Axe der Z-Ebene, die in beiden Blättern liegen.*

Dem einfachen Umgange um A innerhalb des Einheitskreises der s-Ebene entspricht der doppelte Umgang um den Punkt A_1 oder A_2 der Z-Ebene, je nachdem man sich A im oberen oder unteren Blatte der ersteren dachte. Dem einfachen Umgange um B innerhalb des Einheitskreises der Z-Ebene entspricht in gleicher Weise der doppelte Umgang um B_1 oder B_2 in der s-Ebene. Die Figur erläutert alle diese Verhältnisse aufs bequemste. Jede Zweideutigkeit ist aufgehoben. Man prüfe den Zusammenhang an einzelnen Punkten. So liegt z. B. der Punkt $+2$ der s-Ebene auf der Grenze von 1 und VIII oder I und 8, denn 1 und 8 sind dort ohne Zusammenhang, ebenso wie I und VIII. Die entsprechenden Punkte der Z-Ebene sind die durch $\sqrt{1 - 2^2}$ bestimmten, d. h. die Punkte $\pm i\sqrt{3}$. Man sieht in der That, dass in der Z-Ebene der eine auf der Grenze von I und 8, der andere auf der von 1 und VIII liegt. Sein Gegenpunkt -2 aber entspricht Punkten der Z-Ebene an derselben Stelle, nur im unteren Blatte gelegen. Dass die gleichzahligen Theile I und 1, II und 2 u. s. w. in der Z-Ebene jedesmal entgegengesetzte Lage haben, entspricht ganz der Natur der Quadratwurzel. Wegen des involutorischen Charakters der Abbildung

kann man die Oktanteneintheilung auch in die Z-Ebene, die hyperbolische in die z-Ebene einzeichnen.

Ferner ergeben sich folgende analytische Beziehungen, in denen übrigens an jeder Stelle die grossen und kleinen Buchstaben vertauscht werden können:

a) *Den Lemniscaten* $P_1 \cdot P_2 = c$ *um die Punkte* $\pm (\alpha + \beta i)$ *der Z-Ebene entsprechen die Lemniscaten* $p_1 \cdot p_2 = c$ *um die Punkte*

$$\pm \sqrt{1 - (\alpha + \beta i)^2}$$

der z-Ebene, den gleichseitigen Hyperbeln $\Theta_1 + \Theta_2 = \gamma$ *(resp.* $\gamma + 360^0$*, was auf den entgegengesetzten Hyperbelarm führt) die gleichseitigen Hyperbeln*

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \gamma + 180^0 \quad \textit{oder}$$
$$\vartheta_1 + \vartheta_2 - 180^0 = \gamma \ (\textit{resp.}\ \gamma + 360^0).$$

Unter Zugrundelegung dieser Brennpunkte correspondiren also folgende Curven mit einander:

6) $$f[(P_1 \cdot P_2), (\Theta_1 + \Theta_2)] = 0,$$
$$f[(p_1 \cdot p_2), (\vartheta_1 + \vartheta_2 - 180^0)] = 0.$$

b) Setzt man $\alpha + \beta i = 0$, so wird $\sqrt{1 - (\alpha + \beta i)^2} = \pm 1$, die Lemniscaten $P_1 \cdot P_2 = c^2$ also gehen über in die *Kreisschaar* $R = c$, die Hyperbeln $\Theta_1 + \Theta_2 = 2\gamma$ in die *Geraden* $\Theta = \gamma$ *durch den Nullpunkt.* Ihnen entsprechen in der z-Ebene die Lemniscaten $p_1 \cdot p_2 = c^2$ oder $\sqrt{p_1 p_2} = c$ und die Hyperbeln

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\gamma + 180^0 \quad \text{oder} \quad \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - 90^0 = \gamma.$$

Also entsprechen sich in beiden Ebenen die Curven

7) $$f[R, \Theta] = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\sqrt{p_1 \cdot p_2}, \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - 90^0\right)\right] = 0,$$

wobei die Polarcoordinaten auf den Nullpunkt, die lemniscatischen auf die Punkte ± 1 zu beziehen sind.

Auch durch Rechnung lassen sich diese Beziehungen ermitteln. Aus

$$X \pm Yi = \sqrt{1 - (x \pm yi)^2}$$

folgt

8) $$X = \sqrt{\frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2} - (x^2 - y^2 - 1)}{2}},$$

$$Y = \sqrt{\frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2} + (x^2 - y^2 - 1)}{2}}.$$

Die letzteren Wurzeln gleich a. resp. b. gesetzt, geben die isothermischen Gleichungen der Curven, welche den Parallelenschaaren $X = a$ und $Y = b$ entsprechen. Ausserdem folgt für

$$X^2 + Y^2 = c^2$$

als entsprechende Curvengleichung

$$\sqrt{(x^2+y^2+1)^2-4x^2} = \sqrt{[(x+1)^2+y^2]\cdot[(x-1)^2+y^2]} = p_1 \cdot p_2 = c^2,$$

für $\vartheta = \arctan \frac{Y}{X}$ der Werth

$$\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} = \arctan \frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}-(x^2-y^2-1)},$$

oder bequemer für $2\vartheta = \arctan \frac{2XY}{X^2-Y^2}$ die Gleichung

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{2xy}{x^2-y^2-1} = \arctan \frac{y}{x-1} + \arctan \frac{y}{x+1},$$

wobei die periodischen Zusätze $\pm k\pi$ vernachlässigt sind.

Sehr bequem ergiebt sich aus 8) die *hyperbolische Beziehung*

$$10) \quad \begin{cases} X^2 - Y^2 = a, & \text{resp.} \quad 1 - x^2 + y^2 = a, \\ XY = b, & \text{resp.} \quad xy = b. \end{cases}$$

Von besonderem Interesse ist ferner *das gegenseitige Entsprechen der Kegelschnitte mit den Brennpunkten* ± 1 *in beiden Ebenen*, welches an dieser Stelle folgendermassen bewiesen werden kann.

Die Ellipse $p_1 + p_2 = c$ (Fig. 37), oder

$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = c^2$$

kann, da $p_1^2 = r^2 + 1 - 2r\cos\vartheta$, $p_2^2 = r^2 + 1 + 2r\cos\vartheta$ ist, geschrieben werden

$$2r^2 + 2 + 2p_1p_2 = c^2.$$

Nach obigem geht dies durch unsere Abbildung über in

$$2P_1P_2 + 2 + 2R^2 = c^2,$$

wo P_1 und P_2 von ± 1, R von 0 ausgeht, also in eine Gleichung derselben Gestalt, die sich, wie die vorige, schreiben lässt

$$P_1 + P_2 = c.$$

Also: Die Ellipse $p_1 + p_2 = c$ um ± 1 in der z-Ebene geht über in die congruente Ellipse $P_1 + P_2 = c$ um ± 1 in der Z-Ebene.

Aehnliches gilt von der Hyperbel mit denselben Brennpunkten. Ihre Gleichung $p_1 - p_2 = c$ kann geschrieben werden

$$2r^2 + 2 - 2p_1p_2 = c^2,$$

was durch die Abbildung $Z = \sqrt{1-z^2}$ übergeht in

$$2P_1P_2 + 2 - 2R^2 = c^2, \quad \text{oder} \quad 2P_1P_2 - (2+2R)^2 = c^2 - 4,$$

oder

$$P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 = 4 - c^2,$$

oder endlich

$$P_1 - P_2 = \sqrt{4-c^2}.$$

Dies ist wieder eine Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1, die sich übrigens schreiben lässt

$$\sqrt{4 - (P_1 - P_2)^2} = c.$$

Es entsprechen sich also in beiden Ebenen folgende Curvenschaaren in elliptischen Coordinaten mit den Grundpunkten ± 1:

11) $$f[(P_1 + P_2),\ \sqrt{4 - (P_1 - P_2)^2}] = 0$$

und $$f[(p_1 + p_2),\ (p_1 - p_2)] = 0.$$

Später wird sich zeigen, dass diese confocalen Kegelschnitte auch isothermische Coordinaten sind. Eine leichte Betrachtung mittels der Asymptoten zeigt übrigens, dass die Asymptotenwinkel der sich entsprechenden Hyperbeln sich zu 90^0 ergänzen, so dass man die Curven als *Complementarhyperbeln* bezeichnen kann. Die Uebertragung der Punkte der z-Ebene in die Z-Ebene kann also so geschehen, dass man auf der durch jeden Punkt gehenden Ellipse bis zur Complementarhyperbel der durch den Punkt gehenden Hyperbel wandert. Dabei entspricht die Hyperbel mit den Asymptoten $\pm 45^0$ sich selbst, d. h. man hat die früher erwähnte isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel.

Ferner ist folgende Beziehung von Interesse: *Die reciproken Curven der Kegelschnitte mit den Brennpunkten* ± 1 *gegen den Einheitskreis gehen durch die Abbildung* $Z = \sqrt{1 - z^2}$ *über in das Kreisbüschel durch* ± 1 *und die orthogonale Kreisschaar.*

Der Beweis lässt sich folgendermassen geben: Nach § 26 ist die Gleichung der Reciproken der Ellipsen

12) $$\frac{P_1 + P_2}{R} = c.$$

Nach den eben ermittelten analytischen Beziehungen geht dies durch unsere Abbildung über in

13) $$\frac{p_1 + p_2}{\sqrt{p_1 p_2}} = c,$$

oder

$$\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}} = c,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{p_1}{p_2} = \left[\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}\right]^2,$$

oder

13*) $$\frac{p_1}{p_2} = k,$$

d. h. die Gleichung einer Kreisschaar um die Punkte ± 1.

Die Reciproken der Hyperbelschaar haben nach demselben § die Gleichung

$$\frac{P_1 - P_2}{R} = c_1,$$

was durch unsere Abbildung übergeht in

15) $$\sqrt{\frac{4 - (p_1 - p_1)^2}{p_1 p_2}} = c_1.$$

Diese Wurzel hat aber nach Fig. 37 eine einfache trigonometrische Bedeutung, sie ist nämlich gleich dem doppelten Sinus des halben Winkels zwischen den Radii vectores, so dass man hat:

15*) $$2 \sin \frac{\gamma}{2} = c_1.$$

Der Winkel γ ist also constant, die Spitze des Dreiecks bewegt sich also auf einem Kreise durch ± 1, so dass an Stelle der Curven 14) das Kreisbüschel durch diese Punkte tritt, welches die Orthogonalschaar zur vorigen ist. Vergl. Fig. 37.

Statt 15*) kann man auch schreiben $2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = c_1$, oder

15**) $$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 \arcsin \frac{c_1}{2}.$$

Die Gleichungen

$$\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = c$$

und $$\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = c_1$$

sind übrigens von ganz analoger Gestalt.

Schliesslich hat man zwischen beiden Ebenen noch die analytische Beziehung, dass sich folgende Curvensysteme entsprechen:

$$f\left[\frac{P_1 + P_2}{R}, \quad \frac{P_1 - P_2}{R}\right] = 0 \quad \text{und}$$

$$f\left[\left(\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\right), \quad \left(2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right] = 0,$$

wo die Radii vectores von den genannten Punkten ausgehen. In Fig. 43 sind die Reciproken der confocalen Kegelschnitte dargestellt. Aus dem isothermischen Charakter des Kreisbüschels kann man auf den dieser Reciproken und daraus schon hier auf den der confocalen Kegelschnitte schliessen. Es ergeben sich unter Anderem folgende physicalische Deutungen:

1) Einströmung der Elektricität längs einer endlichen Geraden, Ableitung im unendlichen Bereiche, führt auf confocale Ellipsen als Spannungscurven, auf confocale Hyperbeln als Stromlinien. Vergl. Fig. 38, a.

2) Aus einer unbegrenzten Geraden denke man sich ein endliches Stück ausgeschnitten. Durch den einen Rest ströme Elek-

tricität ein, durch den andern aus. Die Spannungscurven sind confocale Hyperbeln, die Stromlinien confocale Ellipsen. Vgl. Fig. 38, a.

3) Einströmung durch die beiden Resttheile unter 2), Ausströmung durch das unbegrenzte symmetrische Loth giebt dieselbe Figur.

4) Einströmung durch dieselben beiden Resttheile, Ableitung durch den Halbirungspunkt des fehlenden Stückes der Geraden führt auf die Reciproken der confocalen Ellipsen als Spannungscurven, auf die Reciproken der Hyperbeln als Stromlinien. Vgl. Figur 43, a.

5) Einströmung durch die eine Hälfte einer endlichen Geraden, Ausströmung durch die andere Hälfte derselben, führt auf dieselbe Figur mit Umtausch der Strom- und Spannungslinien.

6) Einströmung durch eine endliche Gerade, Ausströmung durch das unbegrenzte symmetrische Loth giebt dieselbe Figur.

Der Reichthum analytischer und geometrischer Beziehungen zwischen beiden Ebenen ist gerade bei der vorliegenden Abbildung ein ausserordentlicher. Der Verfasser hat bereits in seinen Beiträgen zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften*) auf denselben hingewiesen und die Betrachtungen dort bis auf die elliptischen Functionen ausgedehnt.

Dem Leser kann es überlassen bleiben, durch die Operation der isothermischen Spiegelung gegen die verschiedenen Individua der hier besprochenen Isothermenschaaren neue geometrische Sätze aufzufinden und die neuen Figuren physikalisch zu deuten. Sämmtliche Fälle der lemniscatischen Verwandtschaft lassen sich in der gleichen Weise durchführen. Auf einige derselben kommen wir noch zurück.

§ 60. Beispiele zu den Curven proportionaler Bogenlängen.

Es handelt sich um Curven, deren entsprechende Bogenlängen im constanten Verhältniss $1 : \varrho_1$ stehen, wo ϱ_1 den absoluten Betrag des Differentialquotienten der abbildenden Function bedeutet. In § 46 wurde auf dieses Problem aufmerksam gemacht. Speciell handelt es sich um die Frage, *auf welchen Curven bei der isothermischen Spiegelung gegen die Lemniscate das Vergrösserungsverhältniss constant ist.* Zwei Specialfälle geben ein einfaches Resultat.

Die Function $Z = \sqrt{1 - z^2}$ vermittelt die Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1. Da der Differentialquotient

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{1 - z^2}}$$

*) Zeitschr. für Mathem. u. Phys. XVIII, S. 228—251. (Jahrg. 1873). Auch Programm 1873 des Gymnasiums zu Elberfeld.

für reelle Werthe des Arguments, die kleiner als die Einheit sind, reell ist, so folgt aus

$$X + Yi = -\frac{x+yi}{\sqrt{1-(x+yi)^2}}$$

die Gleichung $$X - Yi = -\frac{x-yi}{\sqrt{1-(x-yi)^2}},$$

also entsteht durch Multiplication und Radicirung der absolute Betrag

$$R = \frac{r}{\sqrt[4]{(1+x+yi)(1+x-yi)(1-x+yi)(1-x-yi)}} = \frac{r}{\sqrt{p.p_1}},$$

wenn p und p_1 die von ± 1 ausgehenden Radii vectores sind.

Setzt man diesen absoluten Betrag, also auch das Vergrösserungsverhältniss $R = c$, so ergiebt sich Folgendes:

Bei der isothermischen Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1 *ist das Vergrösserungsverhältniss constant gleich c für die Punkte der Curve*

16) $$\frac{r^2}{p.p_1} = c^2,$$

d. h. für die Individua der Orthogonalschaar des durch 0 *und* ± 1 *gehenden Büschels von Schleifenlemniscaten.*

Nun verwandelt sich aber bei der Abbildung $Z = \sqrt{1-z^2}$ der Parameter $p.p_1$, von ± 1 aus gerechnet, in das Quadrat des vom Nullpunkte ausgehenden Radius r, und umgekehrt r^2 in $p.p_1$. Folglich: Die durch Gleichung 16) dargestellte Curve geht über in die Lemniscate

17) $$\frac{r^2}{p.p_1} = \frac{1}{c^2}.$$

Die Curve 16) und ihr Spiegelbild 17) gegen die gleichseitige Hyperbel haben also folgende Beziehungen:

1. Ihre Parameter (in Bezug auf Radii vectores von 0 und ± 1 aus) sind reciprok.
2. Ist der Brennpunkt der einen $\pm \lambda$, so ist der der andern $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$; liegt also das eine Paar auf der imaginären Axe, so liegt das andere auf der reellen, und zwar ausserhalb ± 1.
3. Ist die Brennpunktsgleichung der einen Lemniscate $p.p_1 = \varkappa$, so lautet die der andern genau ebenso; nur sind die neuen Brennpunkte zu Grunde zu legen.
4. Hat die eine den Umfang u, so ist der Umfang der andern $c.u$.
5. Ist die eine in *gleiche* Bogen getheilt, so wird, wenn man durch die Theilpunkte Orthogonalhyperbeln zur spiegelnden Hyperbel oder Lemniscaten durch 0 und ± 1 legt, auch die andere in gleiche Bogen getheilt.

Hier ist also die Analogie mit der Transformation durch reciproke Radii vectores eine sehr weitgehende.

Aehnliches geschieht bei der Spiegelung gegen die Schleifenlemniscate. Sind ihre Brennpunkte ± 1, also auch der Parameter gleich 1, so wird diese Transformation vermittelt durch

$$Z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}.$$

Hier ist $$\frac{dZ}{dz} = \frac{-z}{(z^2-1)^2\sqrt{1+\frac{1}{z^2-1}}} = \frac{-1}{(z^2-1)^{3/2}}.$$

Multiplicirt man hier die Gleichungen conjugirten Arguments, so ergiebt sich als absoluter Betrag

$$R = \frac{1}{[(x+yi+1)(x-yi+1)(x+yi-1)(x-yi-1)]^{3/4}} = \left(\frac{1}{p \cdot p_1}\right)^{3/2},$$

wobei die Radii vectores wiederum von ± 1 ausgehen. Setzt man $R = c$, so folgt:

Bei der Spiegelung gegen die Schleifenlemniscate sind die confocalen Lemniscaten die Curven constanten Vergrösserungsverhältnisses, und zwar ist dasselbe constant gleich c für die Lemniscate

18) $$p \cdot p_1 = c^{-2/3}.$$

Diese geht aber durch die Transformation über in die confocale Lemniscate

19) $$p \cdot p_1 = c^{2/3}.$$

Setzt man $c^{-2/3} = \varkappa$, also $c^{2/3} = \frac{1}{\varkappa}$ und $c = \varkappa^{-3/2}$, so ergiebt sich der Satz:

Haben zwei confocale Lemniscaten mit Brennpunkten ± 1 die reciproken Parameter $\varkappa$ und $\frac{1}{\varkappa}$, so ist der Umfang des zweiten das $\varkappa^{-3/2}$fache vom Umfang des erstern.

Sind z. B. die Parameter 2 und $\frac{1}{2}$, so verhalten sich die Umfänge wie $1 : \frac{1}{\sqrt{8}}$. Ist die eine Curve in gleiche Theile getheilt, so wird die zweite durch die Orthogonalhyperbeln, die durch die Theilpunkte gelegt werden, ebenfalls in gleiche Theile getheilt.

Bei der Spiegelung gegen die Lemniscate allgemeiner Gestalt scheint diese Analogie mit der Kreisreciprocität aufzuhören. Sind z. B. die Brennpunkte $\sqrt{e}$ und der Parameter die Einheit, so ergiebt sich auf demselben Wege, dass die Curven constanten Vergrösserungsverhältnisses c die Gleichung

20) $$\frac{r^2}{p^3 \cdot p_1^3 \cdot q \cdot q_1} = e \cdot c^2$$

haben, wo die Radii vectores p, p_1 von ± 1, q, q_1 von $\pm\sqrt{1+\frac{1}{e}}$, und r von 0 ausgehen.

Achtes Capitel.

Die Abbildungen $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ und $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$.

§ 61. Zusammenhang mit den elliptischen Coordinaten.

Unter den Abbildungen, die mit den rationalen gebrochenen Functionen 2ten Grades zusammenhängen, nimmt die durch die Ueberschrift bezeichnete eine hervorragendere Stellung ein. Sie steht in naher Beziehung zu der Abbildung

$$Z = \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + \frac{1}{e^{zi}}\right),$$

und ist zuerst durch Herrn E. Heine als wichtige Substitution zur Anwendung gekommen, wozu man dessen *Handbuch der Kugelfunctionen* (2. Auflage, Berlin 1878) vergleiche. Dort ist auch der Zusammenhang mit den elliptischen Coordinaten erörtert, der sich auch aus der Siebeck'schen Abhandlung im Crelle'schen Journal (Bd. 55), wo die Abbildung $Z = \cos z$ behandelt wird, ohne Weiteres folgern lässt. (Man vergleiche die Litteraturangaben zu diesem Capitel.)

Dieser Zusammenhang werde der Bequemlichkeit halber zuerst dargestellt. Es ist

$$1)\quad Z = X + Yi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi,$$

so dass

$$2)\quad X = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,$$

$$3)\quad Y = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Um φ zu eliminiren, berechne man aus den letzten beiden Gleichungen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ und quadrire beides, wodurch man 1 erhält und folgende Gleichung findet:

$$4)\quad \frac{X^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ellipse, sobald man r irgend einen constanten reellen Werth giebt. Ihre Halbaxen sind

$$\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right),$$

die Excentricität ergiebt sich aus der Differenz der Quadrate beider als 1, so dass die Punkte ± 1 die Brennpunkte sind. Unter Zu-

grundelegung dieser Brennpunkte kann man ihre Gleichung auch schreiben $P \mp Q = r + \frac{1}{r}$, so dass man folgendes Resultat hat:

Der Kreisschaar $r = c$ um den Nullpunkt der z-Ebene entspricht die Schaar confocaler Ellipsen

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - 1} = c \,,$$

um die Punkte ∓ 1 der Z-Ebene.

Aus Gleichung 2) und 3) folgt ferner

$$\frac{X^2}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2,$$

$$\frac{Y^2}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2.$$

Um r zu eliminiren, subtrahire man beiderseits, wodurch man erhält:

$$5) \qquad \frac{X^2}{\cos^2\varphi} - \frac{Y^2}{\sin^2\varphi} = 1 \,.$$

Giebt man hier φ irgend einen constanten reellen Werth, so ist dies die Gleichung einer Hyperbel mit der Halbaxe $\cos\varphi$, deren Excentricität $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ist, so dass die Brennpunkte wiederum nach ∓ 1 fallen. Setzt man also $\varphi = \gamma$, so kann man statt 5) auch schreiben $P - Q = 2\cos\gamma$ und man hat den Satz:

Dem Strahlenbüschel $\varphi = \gamma$ durch den Nullpunkt der z-Ebene entspricht die Schaar confocaler Hyperbeln

$$\frac{P-Q}{2} = \cos\gamma \quad \textit{oder} \quad \arccos\frac{P-Q}{2} = \gamma$$

um die Punkte ∓ 1 der Z-Ebene.

Es entsprechen sich also in beiden Ebenen die Curvenschaaren

$$6) \quad f\left[\frac{P+Q}{2}, \ \frac{P-Q}{2}\right] = 0, \quad f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \ \cos\vartheta\right] = 0$$

$$7) \quad f\left[\left(\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P-Q}{2}\right)^2 - 1}\right), \ \left(\arccos\frac{P-Q}{2}\right)\right] = 0, \ f(r, \vartheta) = 0.$$

Da die concentrischen Kreise und ihre Radien orthogonale Isothermenschaaren sind, so gilt dasselbe von den confocalen Ellipsen und Hyperbeln. Durch Figur 38 ist der obige Zusammenhang dargestellt, und zwar ist die isothermische Eintheilung in kleine „Quadrate“ gewählt. Da man diese in der z-Ebene erhält, wenn man die Werthe von r einer geometrischen, die von ϑ einer entsprechenden arithmetischen Reihe folgen lässt, so ergiebt sich für die Z-Ebene Folgendes: Man erhält die Eintheilung in kleine der Aehnlichkeit zustrebende Rechtecke mittels confocaler Ellipsen und Hyperbeln, indem man

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad \frac{P-Q}{2} = \cos\vartheta$$

setzt und die aufeinander folgenden Werthe von r einer geometrischen, die von ϑ einer arithmetischen Reihe folgen lässt, z. B.

$$\ldots e^{-3\alpha},\ e^{-2\alpha},\ e^{-\alpha},\ e^{0},\ e^{\alpha},\ e^{2\alpha},\ e^{3\alpha},\ \ldots.$$
$$\ldots -3\beta,\ -2\beta,\ -\beta,\ 0,\ \beta,\ 2\beta,\ 3\beta,\ \ldots.$$

Ist übrigens $\alpha = \beta$, so wird die Eintheilung quadratisch.

Aus der Figur 38 folgt auch, dem zweideutigen Charakter der umgekehrten Function $Z = z - \sqrt{Z^2 - 1}$ entsprechend, dass die Z-Ebene als doppelt angesehen werden muss. Welcher Art diese Zweideutigkeit ist, lässt sich durch folgende Betrachtung erkennen: Der Ausdruck $r + \frac{1}{r}$ ändert sich nicht, wenn man statt r seinen reciproken Werth $\frac{1}{r}$ nimmt, folglich entspricht dem Kreise $r = c$ und dem Kreise $r = \frac{1}{c}$ *dieselbe* Ellipse $\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$. Diese beiden Kreise sind aber zu einander reciprok gegen den Einheitskreis und da dem letzteren die Ellipse

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1$$

entspricht, d. h. die Gerade von -1 nach $+1$, so entspricht der obigen Reciprocität die Symmetrie gegen diese Gerade.

Dem Aeusseren des Einheitskreises entspricht also das obere Blatt der Z-Ebene, dem inneren das untere Blatt, und beide Blätter durchkreuzen sich längs der Linie von -1 *nach* $+1$ *ohne jeden Zusammenhang, der nur in den Punkten* ± 1 *stattfindet.*

Diese beiden sind Windungspunkte 1ter Ordnung, in denen die Conformität insofern gestört erscheint, als die Winkel dort verdoppelt werden.

Da die Ellipsen mit zunehmender Grösse immer mehr kreisähnlich, die Hyperbeln aber in demselben Maasse geradlinig werden, da ferner die Quadranten der oberen Z-Ebene den gleichliegenden der z-Ebene ausserhalb des Einheitskreises entsprechen, so folgt, dass die Geraden durch Null und die Asymptoten der entsprechenden Hyperbeln gleiche Richtung haben.

Dass die Punkte ± 1 Verzweigungspunkte sind, beweise der Leser selbst mit Hülfe des dort verschwindenden Differentialquotienten von $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)$ oder der dort aufhörenden Zweideutigkeit der umgekehrten Function. Aus Fig. 38 entnehme man ferner, welche Quadrate beider Ebenen einander entsprechen. Die Riemann'sche Fläche, welche die Z-Ebene darstellt, ist in Figur 39, schematisch gezeichnet. Dass die Uebertragung der einen Ebene in die andere nur elementare Constructionsmittel erfordert, ist aus den obigen Beziehungen zu entnehmen. Die obige Reciprocität zu-

sammengehöriger Punkte der z-Ebene folgt übrigens auch aus der Gleichung

$$\frac{1}{a+bi\sqrt{(a+bi)^2-1}} = a+bi-\sqrt{(a+bi)^2-1}.$$

§ 62. Untersuchung der Curvensysteme, die beliebigen Strahlenbüscheln und Kreisschaaren der Z-Ebene entsprechen.

Aus $$Z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

folgt

8) $$X+Yi-(a+bi)=\frac{(x+yi)^2+1}{2(x+yi)}-(a+bi)$$
$$=\frac{[x+yi-(\alpha_1+\beta_1 i)]\cdot[x+yi-(\alpha_2+\beta_2 i)]}{2(x+yi)}$$

und

9) $$X-Yi-(a-bi)=\frac{(x-yi)^2+1}{2(x-yi)}-(a-bi)$$
$$=\frac{[x-yi-(\alpha_1-\beta_1 i)]\cdot[x-yi-(\alpha_2-\beta_2 i)]}{2(x-yi)},$$

wo $\alpha_1+\beta_1 i$ und $\alpha_2+\beta_2 i$ die beiden Werthe

$$a+bi\pm\sqrt{(a+bi)^2-1}$$

bedeuten, die sich nach Trennung des Reellen und Imaginären folgendermassen schreiben lassen:

$$a\pm\sqrt{\frac{\sqrt{(a^2-b^2-1)^2+4a^2b^2}+(a^2-b^2-1)}{2}}$$
$$+i\left[b\pm\sqrt{\frac{\sqrt{(a^2-b^2-1)^2+4a^2b^2}-(a^2-b^2-1)}{2}}\right].$$

Multiplication der Gleichungen 8) und 9) giebt

$$(X-a)^2+(Y-b)^2=\frac{[(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2]\cdot[(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2]}{4(x^2+y^2)},$$

oder $$R=\frac{p\cdot q}{2r},$$

wobei R die Entfernung des Punktes $X+Yi$ von $(a+bi)$ bedeutet, während p, q, r die Entfernungen des Punktes $x+yi$ von $\alpha_1+\beta_1 i$, $\alpha_2+\beta_2 i$ und Null sind.

Dividirt man hingegen Gleichung 8) durch Gleichung 9) und logarithmirt man beiderseits unter Zufügung des Factors $\frac{1}{2i}$, so erhält man

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi-(a+bi)}{X-Yi-(a-bi)}$$
$$=\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-(\alpha_1+\beta_1 i)}{x-yi-(\alpha_1-\beta_1 i)}+\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-(\alpha_2+\beta_2 i)}{x-yi-(\alpha_2-\beta_2 i)}-\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi}{x-yi},$$

oder, was nach bekannter Formel dasselbe ist:

$$\arctan \frac{Y-b}{X-a} = \arctan \frac{y-\beta_1}{x-\alpha_1} + \arctan \frac{y-\beta_2}{x-\alpha_2} - \arctan \frac{y}{x},$$

oder

$$\Theta = \varphi + \chi - \vartheta,$$

wobei die neuen Buchstaben die Richtungswinkel der Radii vectores R, p, q und r gegen die reelle Axe bedeuten.

So ergiebt sich der Satz:

Der concentrischen Kreisschaar $R = c$ um den Punkt $a + bi$ der Z-Ebene und dem Strahlenbüschel $\Theta = \gamma$ durch diesen Punkt entsprechen die Curvensysteme

$$10) \qquad \frac{p \cdot q}{2r} = c$$

$$11) \qquad \varphi + \chi - \vartheta = \gamma,$$

deren Radii vectores von den Punkten $a + bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$ und Null ausgehen.

Aus der Conformität der Abbildung folgt, dass sich die Systeme 10) und 11) rechtwinklig schneiden. Später wird sich zeigen, *dass sie sich stets als Reciproke eines Lemniscatenbüschels und der zugehörigen Orthogonalschaar von Lemniscaten betrachten lassen, wobei einer der Kreise um die Punkte ± 1 mit dem Radius $\sqrt{2}$ als spiegelnde Curve auftritt.*

Aus den Gleichungen ergeben sich verschiedene Constructionsmethoden. Beide Curvengruppen haben nach Obigem die Eigenschaft, dass sich der innerhalb des Einheitskreises liegende Theil durch Reciprocität gegen denselben und durch Symmetrie aus dem ausserhalb liegenden Theile erzeugen lässt. Für die Curven 11) folgt daraus, dass sie sowohl den unendlichen als den Nullpunkt passiren und dass jede eine Asymptote besitzt, welche, abgesehen vom Vorzeichen, dieselbe Neigung hat, wie ihre Tangente im Nullpunkte. Liegen ferner $\alpha_1 + \beta_1 i$ und $\alpha_2 + \beta_2 i$ auf der reellen oder imaginären Axe, so treten für beide Curvengruppen noch gewisse Symmetrieverhältnisse auf.

Charakteristisch für die Curven 11) ist Folgendes: Die Gerade Linie hat in allen Punkten dieselbe Neigung $\vartheta = \gamma$. Folglich: *Die Gleichung $\varphi + \chi - \vartheta = \gamma$ bleibt für jede Curve* 11) *vollständig unverändert, wenn man statt $\alpha_1 + \beta_1 i$ und $\alpha_2 + \beta_2 i$ einen beliebigen ihrer Punkte ausserhalb des Einheitskreises und den nach obigem Gesetze ihm entsprechenden innerhalb desselben zum Ausgangspunkte der Radii vectores macht.* Das Entsprechende für die Curven 10) wird später angegeben.

Die Form, in welcher die linken Seiten der Gleichungen dieser Isothermenschaaren der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen, findet

man, indem man in $\lg \frac{pq}{2r} = c$ und $\varphi + \chi - \vartheta = \gamma$ Cartesische Coordinaten einsetzt. Auf die entsprechenden Vereinfachungen kommt man folgendermassen: Durch die Abbildung

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

gehen unsere Curven in das Strahlenbüschel durch $(a + bi)$ und die orthogonale Kreisschaar über, folglich durch die Transformation

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - (a + bi)$$

in Strahlen durch Null und die zugehörige Kreisschaar, also durch die Abbildung

$$Z = \lg\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - (a + bi)\right]$$

in Parallelenschaaren zur reellen und imaginären Axe. Trennt man aber in letzterer Function das Reelle vom Imaginären, so ergiebt sich

$$X + Yi = \lg\left[\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} - a + i\left(\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} - b\right)\right]$$
$$= \lg(\xi + \eta i) = \frac{1}{2}\lg(\xi^2 + \eta^2) + i \arctan\frac{\eta}{\xi},$$

wobei von dem periodischen Zusatze abgesehen ist. Setzt man jetzt die reellen resp. imaginären Theile gleich, so ergiebt sich, dass den Geraden $X = a_1$ der neuen Z-Ebene die Curven

$$12) \quad \frac{1}{2}\lg\left[\left(\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} - a\right)^2 + \left(\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} - b\right)^2\right] = a_1,$$

den Geraden $Y = b_1$ die Curven

$$13) \quad \arctan\frac{y(x^2+y^2-1) - 2b(x^2+y^2)}{x(x^2+y^2+1) - 2a(x^2+y^2)} = b_1$$

entsprechen.

Da die linken Seiten beider Gleichungen den reellen, resp. den von i befreiten Theil einer Function complexen Arguments darstellen, so genügen sie der obigen Differentialgleichung.

Bei der Auswerthung zeigt sich, dass die Curvenschaar 10) resp. 12) vom 4ten Grade, die Gruppe 11) resp. 13) vom 3ten Grade ist. Für das Folgende wird es genügen, beide als *„Isothermen 4ten resp. 3ten Grades der z-Ebene"* zu bezeichnen, obgleich es dort noch andere Isothermen desselben Grades giebt.

In Figur 40 ist beispielsweise links das Strahlenbüschel durch den Nullpunkt der Z-Ebene nebst orthogonaler Kreisschaar dargestellt, während sich rechts das Isothermenbüschel 3ten Grades

durch $\pm i$, 0 und ∞ nebst orthogonaler Isothermenschaar 4ten Grades befindet. Durch Buchstaben ist das gegenseitige Entsprechen der Flächentheile erläutert, besonders die Zweideutigkeit tritt klar hervor. Die Schraffirung der Fläche des Einheitskreises soll andeuten, dass dieser Theil der s-Ebene dem zweiten Riemann'schen Blatte der Z-Ebene entspricht. Auch das Reciprocitätsverhältniss der gleichnamigen Felder der s-Ebene ist leicht zu erkennen. In derselben befinden sich ausser dem Einheitskreise noch zwei andere durch ± 1 gehende Kreise, die dem Einheitskreise der Z-Ebene entsprechen. Da gegen letzteren Reciprocität des Strahlenbüschels in Bezug auf sich selbst und ausserdem Reciprocität je zweier Kreise vorhanden ist, so folgt, dass in diesem Falle die Isothermen 3ten Grades in Bezug auf diese Kreise sich selbst reciprok sind, und dass von je zwei Individuen der Schaar 4ten Grades dasselbe gilt. Solche Kreise sind übrigens stets vorhanden, wenn das Centrum des Strahlenbüschels der Z-Ebene auf der imaginären Axe, oder ausserhalb ± 1 auf der reellen liegt, und zwar gehen im ersteren Falle die sich dann rechtwinklig schneidenden Kreise durch ± 1, während im andern Falle nur einer vorhanden ist, der das Kreisbüschel durch ± 1 rechtwinklig schneidet. Zu erwähnen ist noch, dass die dargestellten Curven 3ten Grades aus einem einzigen Zuge bestehen, die Curven 4ten Grades im Allgemeinen aus getrennten Ovalen. Für die innerhalb der beiden Kreise um $\pm i$ liegenden Curven findet hier Symmetrie der Ovale statt: für die ausserhalb liegenden befindet sich der zweite Theil innerhalb des linsenförmigen Flächenstücks und ist das reciproke Gebilde des ersteren gegen den Einheitskreis.

Die Figur giebt die quadratische Eintheilung. Verschiedene physikalische Deutungen sind möglich.

Denkt man sich z. B. die durch zwei Kreisbogen gebildete Sichel $+1$, Y, -1, Y_1 längs des Randes auf constanter Temperatur gehalten, die nächste Umgebung des Punktes i auf anderer constanter Temperatur, so tritt schliesslich ein stationärer Wärmezustand in der Ebene ein. Für denselben sind die innerhalb der Sichel befindlichen Curven 4ten Grades Isothermen.

Ein Gleiches gilt von dem linsenförmigen Flächenstücke $+1$, Y_1, -1, Y_2 und dem Nullpunkte; Entsprechendes für den Aussenraum der beiden grösseren Kreise und den unendlichen Bereich, für welchen letzteren man auch einen sehr grossen Kreis mit dem Nullpunkte als Centrum setzen kann.

Oder: die Punkte $\pm i$ mögen auf gleicher constanter Temperatur gehalten werden, der Punkt Null und der den unendlichen

Bereich vertretende sehr grosse Kreis um den Nullpunkt auf anderer constanter Temperatur. Für den stationären Zustand sind dann sämmtliche Curven 4ten Grades der Zeichnung Isothermen. Der gegenseitige Zusammenhang derselben kann durch folgende kinematische Betrachtungsweise lebendig illustrirt werden. Man denke sich in der Z-Ebene concentrische Kreise aus dem Nullpunkte hervorquellend und sich vergrössernd, ähnlich, wie sie auf ruhiger Wasserfläche beim Aufschlagen eines Steines beobachtet werden. Was entspricht dieser Bewegung in der z-Ebene? Aus den Punkten $\pm i$ quellen kleine Kreise hervor, die jedoch bald andere Gestalt annehmen und durch alle Phasen hindurch sich soweit vergrössern, bis sie in den Punkten ± 1 sich treffen, wobei die Kreisgestalt in gewisser Weise wieder erscheint. Ein Theil des ersten Ovals vereinigt sich mit einem des andern zu einer die Kreise umschliessenden Curve, welche sich bei weiterer Vergrösserung der Kreisgestalt wieder nähert, die abgelösten Reste vereinigen sich innerhalb der Linse zu Ovalen, die kleiner und kleiner werdend sich der Kreisgestalt nähern und schliesslich im Nullpunkte verschwinden.

Eine elektrodynamische Deutung erhält man z. B., indem man die Punkte $\pm i$ als Einströmungselektroden, den Nullpunkt und den unendlichen Bereich als Ausströmungselektroden betrachtet. Der schraffirte Theil der Zeichnung kann auch als selbstständige Kreisscheibe betrachtet werden, in welche in den Punkten $\pm i$ Elektricität ein-, im Centrum ausströmt.

Für beide Curvengruppen treten gewisse Singularitäten ein, wenn $a + bi = \pm 1$ ist; denn da $a + bi + \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$ für diese Punkte eindeutig wird, werden zwei Radii vectores identisch und die Gleichungen verwandeln sich in folgende:

$$14) \qquad \frac{p^2}{2r} = c,$$

$$15) \qquad 2\varphi - \vartheta = \gamma.$$

Beiläufig sei bemerkt, dass sie dann die Reciproken der confocalen Lemniscaten und des gleichseitigen Hyperbelbüschels um resp. durch ± 1 sind, und zwar gegen einen der Kreise um ± 1 mit Radius $\sqrt{2}$. Zur Gruppe 15) gehört der *Einheitskreis*, zu Gruppe 14) eine durch -1 gehende *Pascal'sche Schneckenlinie* (limaçon), die einzige der Curven dieser Gruppe, welche eine Schleife besitzt. Die Curven 15) bilden, mit Ausnahme der Geraden und des Einheitskreises sämmtlich rechtwinklige Schleifen, die durch Null und $+1$ (resp. -1) gehen und erinnern in ihrer Gestalt mehr oder weniger

an das Folium Cartesii. Fig. 41 stellt beide Schaaren dar, nur ist sie durch Inversion gegen den Kreis zu vervollständigen.

Aus Gleichung 15) folgt, dass für sehr kleines ϑ sich 2φ der Grösse γ nähert, so dass dem Winkel $\Phi = \gamma$ der Z-Ebene, der seinen Scheitel in $+1$ hat, der Winkel $\varphi = \frac{\gamma}{2}$ entspricht, so dass überhaupt jeder Winkel ε, dessen Scheitel sich dort befindet, in der z-Ebene auf $\frac{\varepsilon}{2}$ oder $\frac{\varepsilon}{2} + 180^0$ reducirt wird. Diese schon oben erwähnte Halbirung des Winkels entspricht dem Charakter des Windungspunktes 1ter Ordnung. Bei den Kreisbeziehungen beider Ebenen kommt dieser Punkt noch einmal zur Sprache. — Die physikalischen Deutungen der Fig. 41 sind leicht auszusprechen. Ganz allgemein entsprechen sich in beiden Ebenen die Curvenschaaren

$$16) \quad f(R, \Theta) = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\left(\frac{p \cdot q}{2r}\right), (\varphi + \chi - \vartheta)\right] = 0,$$

und zwar gehen die Radii vectores der letzteren von

$$a + bi \pm \sqrt{(a + bi)^2 - 1}$$

und Null aus, wenn die Polarcoordinaten der ersteren Curve auf einen Punkt $(a + bi)$ *bezogen waren.*

So entspricht z. B. den logarithmischen Spiralen $R = ck^{\Theta}$, welche ein Strahlenbüschel durch $a + bi$ isogonal durchsetzen, eine Curvenschaar

$$17) \qquad \frac{p \cdot q}{2r} = c \cdot k^{\varphi + \chi - \vartheta},$$

d. h. die Schaar der isogonalen Trajectorien des Isothermenbüschels 3ten *und der Orthogonalschaar* 4ten *Grades.* Die Eigenschaften dieser transscendenten Curven sind, wie in den früheren Fällen, denen der logarithmischen Spirale ganz analog. Lässt man in den Gleichungen 10) und 11) die Werthe von c einer geometrischen, die von γ einer arithmetischen Reihe folgen, so erhält man die isothermische Rechteckstheilung, als deren Diagonalcurven sich die Curven 17) betrachten lassen. Fig. 40 und 41 stellen die quadratische Eintheilung dar.

Aus Gleichung 15) folgt, dass das Kreisbüschel durch beliebige Punkte $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ der Z-Ebene und seine Orthogonalschaar, deren Gleichungen sind

$$\Phi - X = \gamma, \qquad \frac{P}{Q} = c,$$

in folgende Curvensysteme der z-Ebene übergehen:

$$\varphi + \varphi_1 - (\chi + \chi_1) = \gamma,$$
$$\frac{p \cdot q_1}{p \cdot q_1} = c,$$

deren Radii vectores von den Punkten $a + bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 1}$ und $a_1 + b_1 i \pm \sqrt{(a_1 + b_1 i)^2 - 1}$ ausgehen. *Diese Curven bilden das Isothermenbüschel 4ten Grades durch die genannten vier Punkte und die orthogonale Isothermenschaar desselben Grades.*

Die geometrische und physikalische Deutung dieser Isothermenschaaren und ihrer isogonalen Trajectorien

$$\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c\,, \; k\varphi + \varphi_1 - (\chi + \chi_1)$$

bleibe dem Leser überlassen. Sämmtliche Gleichungen lauten identisch mit den entsprechenden des Capitels 6, nur haben die Ausgangspunkte der Radii vectores hier im Allgemeinen eine andere Lage.

Die Doppelverhältnisse und sonstige geometrische Relationen können wie dort aus der Z-Ebene in die z-Ebene übertragen werden.

Noch ein Specialfall der obigen Isothermensysteme bleibt der Vollständigkeit halber zu behandeln.

Den Parallelen zur X- und Y-Axe der Z-Ebene entsprechen welche Curven?

Aus

$$X + Yi = \frac{1}{2}\left(x + yi + \frac{1}{x + yi}\right)$$

folgt durch Trennung des Reellen und Imaginären und Gleichsetzung der entsprechenden Theile, dass die Geraden $X = a$ und $Y = b$ in folgende Curven 3ten Grades übergehen:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2} = a,$$
$$\frac{y}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2} = b.$$

Diese Gleichungen genügen mit ihren linken Seiten der Differentialgleichung $\triangle u = 0$. Die Rechteckseintheilung der Ebene geschieht, wenn beide Parameter arithmetischen Reihen folgen. Die isogonalen Trajectorien sind wieder Isothermen 3ten Grades. Aus der Gleichung der Geraden

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1$$

folgt, dass die allgemeine Gleichung der Isothermen 3ten Grades auf die Form

$$bx(x^2 + y^2 + 1) + ay(x^2 + y^2 - 1) = 2ab\,(x^2 + y^2)$$

gebracht werden kann. Alle Curven von dieser Gleichung haben

also die durch Gleichung 11) charakterisirte Erzeugungsweise. Dass ferner jeder Curve $f(XY) = 0$ der Z-Ebene eine Curve

$$f\left[\left(\frac{x}{2} \cdot \frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}\right), \quad \left(\frac{y}{2} \cdot \frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}\right)\right] = 0$$

entspricht, ist selbstverständlich.

§ 63. Uebertragung der Geometrie der s-Ebene in die der Z-Ebene.

Für diese Umkehrungsaufgabe ist die soeben benutzte Methode nicht anwendbar, da die bequemen Factorenzerlegungen hier wegfallen. Sowohl geometrisch als auch analytisch wird der Ausdruck schwerfälliger, und dies hängt eng damit zusammen, dass die Eigenschaften des Arcuscosinus und des Logarithmus sich nicht so elegant darstellen lassen, wie die des Cosinus resp. der Exponentialfunction. Der Zusammenhang erklärt sich daraus, dass

$$Z = \frac{1}{2}\left(e^{s} + \frac{1}{e^{s}}\right) = \cos si,$$

also $s = \frac{1}{i} \operatorname{arc\,cos} Z = \lg(Z + \sqrt{Z^2 - 1})$ ist. Der Inhalt dieses Paragraphen wird nur der Vollständigkeit wegen gegeben, da die Methoden sich später vereinfachen lassen.

Dem Punkte $x + yi$ der s-Ebene entspricht der Punkt

$$X + Yi = \frac{1}{2}\left(x + yi + \frac{1}{x+yi}\right)$$

der andern, der sich wiederum elementar construiren lässt, da $\frac{1}{x+yi}$ durch Reciprocität des Punktes $x + yi$ gegen den Einheitskreis und Umlegen um die reelle Axe dargestellt wird, worauf nur noch Addition complexer Strecken anzuwenden ist. Denselben Punkt findet man natürlich, wenn statt des Arguments $x + yi$ der reciproke Werth desselben genommen wird. Diese Zweideutigkeit ist bereits erörtert.

Trennt man in

$$x + yi = X + Yi + \sqrt{(X + Yi)^2 - 1}$$

das Reelle vom Imaginären, und setzt man das Zusammengehörige gleich, so folgt, dass den Linien $x = a$ und $y = b$ folgende Curven entsprechen:

$$18) \quad \begin{cases} X + \sqrt{\dfrac{\sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2} + (X^2 - Y^2 - 1)}{2}} = a, \\ Y + \sqrt{\dfrac{\sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2} - (X^2 - Y^2 - 1)}{2}} = b. \end{cases}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen genügen aus dem oben angegebenen Grunde der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Ihre Discussion würde umständlich sein. Später wird sich durch eine einfache Combination ergeben, *dass es sich um die Reciproken zweier Orthogonalschaaren sich berührender Pascal'scher Schneckenlinien (limaçons) handelt*, wobei der Kreis um $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$ als spiegelnde Curve auftritt.

Die Construction, wie überhaupt jedes Uebertragen der Geometrie der z-Ebene in die der Z-Ebene ist elementar durchführbar. Die analytische Beziehung beider Ebenen ist die, dass der Curve $f(xy) = 0$ der z-Ebene die Curve

$$19) \quad f\left[\left(X + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2} + (X^2 - Y^2 - 1)}{2}}\right), \left(Y + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2} - (X^2 - Y^2 - 1)}{2}}\right)\right] = 0$$

entspricht. Weit einfacher erscheinen die im vorigen Abschnitt dargestellten Relationen. Hier fehlen eben die Radii vectores, die sich vorher aus der Zerlegung der Function in Factoren ergaben. Man hat selbst bei einfachen Uebertragungen schwerfällige Rechnungen nöthig, bei denen sich allerdings abgekürzte Bezeichnungen anwenden lassen.

Um z. B. die Gleichung der Curve zu finden, die einer Curve der z-Ebene, welche in Polarcoordinaten ϱ und φ in Bezug auf einen Punkt $a + bi$ gegeben ist, entspricht, stelle man die Gleichungen des Kreises $\varrho = c$ und der Linie $\vartheta = \gamma$ in gewöhnlichen Coordinaten auf und setze in denselben an Stelle von x und y die linken Seiten der Gleichungen 18). Die gefundenen Ausdrücke mögen mit

$$f_1(XYab) = c \quad \text{und} \quad f_2(XYab) = \gamma$$

bezeichnet werden. Der Curve $F(\varrho\varphi) = 0$ der z-Ebene entspricht also die Curve

$$F[f_1(XYab), f_2(XYab)] = 0$$

in der andern. *Es wird sich später zeigen, dass auch die durch f_1 und f_2 charakterisirten Coordinaten die Reciproken zweier orthogonaler Schaaren Pascal'scher Schneckenlinien sind.*

§ 64. Weiteres über die elliptischen Coordinaten.

Bei dem allgemeineren Interesse der elliptischen Coordinaten geben wir für die Untersuchung der in § 61 entwickelten Hauptbeziehung noch folgenden Weg an.

Nach Gleichung 14) entspricht dem Kreise mit Radius $P = c$ um den Punkt -1 der Z-Ebene die Curve $\frac{p^2}{2r} = c$, dem Kreise $Q = c$ um $+1$ die Curve $\frac{q^2}{2r} = c$, wobei die Radii vectores p, q, r von $+1$, -1 und Null ausgehen. Die der Ellipse $\frac{P+Q}{2} = c$ um die Brennpunkte ± 1 der Z-Ebene correspondirende Curve ist also $\frac{p^2+q^2}{4r} = c$, so dass ihre Gleichung in Cartesischen Coordinaten lautet:

$$\frac{(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2}{4\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2+1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = c,$$

oder

$$\frac{r^2+1}{2r} = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right) = c,$$

oder endlich

$$r = c \pm \sqrt{c^2-1}.$$

Ebenso geht die Hyperbel $\frac{P-Q}{2} = \varkappa = \cos(\pm\gamma)$, wo also $\pm\gamma$ den Neigungswinkel der Asymptoten bedeutet, über in die Curve $\frac{p^2-q^2}{4r} = \varkappa$, oder in gewöhnlichen Coordinaten in:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \varkappa,$$

d. h. in $\cos\vartheta = \cos(\pm\gamma)$ oder in $\vartheta = \pm\gamma = \pm \operatorname{arc}\cos\varkappa$. Also: *Die Hyperbel $\frac{P-Q}{2} = \cos\gamma$ der Z-Ebene verwandelt sich in die Geraden $\vartheta = \pm\gamma$ durch Null, die also gleiche Neigung mit den Asymptoten der Hyperbel haben.*

Aus der Gleichung $r = ck^\vartheta$ der logarithmischen Spirale um den Nullpunkt ergiebt sich als Gleichung der isogonalen Trajectorien der confocalen Kegelschnitte

$$20) \qquad \frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - 1} = c\varkappa^{\operatorname{arc}\cos\frac{P-Q}{2}}.$$

Die geometrische Deutung dieser Gleichung giebt die Fundamentaleigenschaft dieser Curven, welche sich als Diagonalcurven der obigen Rechteckseintheilung betrachten lassen, so dass, wenn ausser den Brennpunkten nur zwei aufeinanderfolgende Diagonalpunkte bekannt sind, die Construction beliebig vieler Punkte der transscendenten Curve elementar geschehen kann.

Um die Gleichungen der confocalen Kegelschnitte in der der Gleichung $\Delta u = 0$ genügenden Form zu schreiben, betrachten wir die Abbildung

21) $$Z = \frac{1}{2}\left[e^z + \frac{1}{e^z}\right] = \cos zi$$

und ihre Umkehrung

22) $$z = \lg\left[Z = \sqrt{Z^2 - 1}\right] = \frac{1}{i} \operatorname{arc\,cos} Z,$$

von denen die letztere die Kegelschnitte direkt in Parallelen zur reellen resp. imaginären Axe verwandelt. Aus

$$X + Yi = \cos(xi - y) = \cos(xi)\cos y + \sin(xi)\sin y$$

folgt nämlich

$$X = \cos(xi)\cos y,$$
$$Yi = \sin(xi)\sin y,$$

woraus, wie schon früher, durch Quadrirung und Addition gefolgert werden kann

$$\frac{X^2}{\cos^2 y} - \frac{Y^2}{\sin^2 y} = 1$$

und

$$\frac{X^2}{\cos^2 xi} - \frac{Y^2}{\sin^2 xi} = 1.$$

Das erste ist die Hyperbel-, das andere die Ellipsengleichung. Der Geraden $x = a$ entspricht also die Ellipse

$$\frac{P+Q}{2} = \cos ai = \frac{e^a + e^{-a}}{2},$$

der Geraden $y = b$ die Hyperbel

$$\frac{P-Q}{2} = \cos b = \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2},$$

also, wenn man gewöhnliche Coordinaten einführt:

23) $$\frac{1}{i} \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{(X+1)^2 + Y^2} + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}}{2} = a,$$

oder, um das Imaginäre zu vermeiden,

23*) $$\lg(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) = a,$$

wo der periodische Zusatz vernachlässigt und für ξ der Werth

$$\frac{\sqrt{(X+1)^2 + Y^2} + \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}}{2}$$

einzusetzen ist; und

24) $$\operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{(X+1)^2 + Y^2} - \sqrt{(X-1)^2 + Y^2}}{2} = b.$$

Diese Gleichungen der Ellipse und Hyperbel genügen mit ihren linken Seiten der obigen Differentialgleichung, da $a = x$ und $b = y$ die reellen resp. imaginären Theile der Hülfsfunction

$$x + yi = \frac{1}{i} \operatorname{arc\,cos}(X + Yi)$$

sind.

Einige Vereinfachungen der Schreibweise ergeben sich, wenn man die Bezeichnungen der Hyperbelfunctionen einführt. Auf diesen Punkt kommen wir bei der Behandlung der Kreisfunctionen zu sprechen.

Die Uebertragung der Geometrie der z-Ebene in die Z-Ebene gestaltet sich jetzt folgendermassen: Der Kreis $\varrho = c$ um $a + bi$ hat in gewöhnlichen Polarcoordinaten die Gleichung

$$\sqrt{r^2 - 2r(a\cos\vartheta + b\sin\vartheta) + a^2 + b^2} = c,$$

ihm entspricht also, wenn man $\frac{P+Q}{2} = u$, $\frac{P-Q}{2} = v$ setzt, in der Z-Ebene die Curve

25) $$\sqrt{(u+\sqrt{u^2-1})^2 - 2(u+\sqrt{u^2-1})(av+b\sqrt{1-v^2}) + a^2 + b^2} = c,$$

oder kurz geschrieben

$$f_1(uvab) = c.$$

Ebenso geht die Gerade durch $a + bi$ mit dem Neigungswinkel $\varphi = \gamma$, deren Gleichung in Polarcoordinaten lautet

$$\operatorname{arc\,tan}\frac{r\sin\vartheta - b}{r\cos\vartheta - a} = \gamma,$$

über in

26) $$\operatorname{arc\,tan}\frac{(u+\sqrt{u^2-1})\sqrt{1-v^2} - b}{(u+\sqrt{u^2-1})\,v - a} = \gamma,$$

oder kurz

$$f_2(uvab) = \gamma.$$

Der Curve $F(\varrho\varphi) = 0$ entspricht also die Curve

$$F[f_1(uvab),\ f_2(uvab)] = 0,$$

wozu § 62 zu vergleichen ist. Die durch f_1 und f_2 dargestellten Coordinaten stimmen nämlich mit den dort besprochenen überein.

§ 65. Das gegenseitige Entsprechen der Bicircularcoordinaten beider Ebenen mit den Grundpunkten ± 1.

Das Kreisbüschel durch die Punkte ± 1 der Z-Ebene hat die Gleichung $\Phi - X = \gamma$, die Orthogonalschaar die Gleichung $\frac{P}{Q} = c$, wobei die Coordinaten auf ± 1 bezogen sind. Nach den Gleichungen 14) und 15) entsprechen ihnen, da sich beim Einsetzen die von Null ausgehenden Radii vectores wegheben, die Curven

27) $2(\varphi - \chi) = \gamma$, oder $\varphi - \chi = \frac{\gamma}{2}$ resp. $180^0 + \frac{\gamma}{2}$,

28) $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = c$, oder $\frac{p}{q} = \sqrt{c}$,

also ebenfalls ein Kreisbüschel durch ± 1 *und die orthogonale Kreisschaar,* und zwar correspondiren jedem Kreise des Büschels der Z-Ebene mit dem Peripheriewinkel γ zwei Individua des Büschels der anderen Ebene mit den Peripheriewinkeln $\frac{\gamma}{2}$ und $180^0 + \frac{\gamma}{2}$, die sich demnach rechtwinklig schneiden. Man vergleiche hierzu die sich an die Gleichungen 14) und 13) anschliessenden Erörterungen, aus denen bereits hervorgeht, dass zwei Büschelkreise der Z-Ebene sich unter dem doppelten Winkel schneiden, wie die entsprechenden der z-Ebene.

Das obige Resultat ergiebt sich unabhängig hiervon noch auf folgendem Wege:

Aus

$$z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

folgen die Gleichungen:

$$z + 1 = Z + 1 + \sqrt{Z^2 - 1} = \sqrt{Z + 1}\,(\sqrt{Z + 1} + \sqrt{Z - 1})$$

und

$$z - 1 = Z - 1 + \sqrt{Z^2 - 1} = \sqrt{Z - 1}\,(\sqrt{Z + 1} + \sqrt{Z - 1}),$$

also durch Division

$$\frac{z+1}{z-1} = \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}},$$

oder

$$\left(\frac{x+yi+1}{x+yi-1}\right)^2 = \frac{X+Yi+1}{X+Yi-1},$$

woraus sich ergiebt

$$\left(\frac{x-yi+1}{x-yi-1}\right)^2 = \frac{X-Yi+1}{X-Yi-1},$$

also durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{P}{Q},$$

wobei die Radii vectores von ± 1 ausgehen.

Durch Division derselben Gleichungen, Logarithmirung und Zusetzung des Factors $\frac{1}{2c}$, folgt:

$$2\left[\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi+1}{x-yi+1} - \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-1}{x-yi-1}\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi+1}{X-Yi+1} - \frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi-1}{X-Yi-1},$$

oder

$$2\left[\operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x+1} - \operatorname{arc\,tan}\frac{y}{x-1}\right] = \operatorname{arc\,tan}\frac{Y}{X+1} - \operatorname{arc\,tan}\frac{Y}{X-1},$$

oder indem man für die arc tan die Richtungswinkel der oben genannten Radii vectores setzt:

$$2(\varphi - \chi) = \Phi - X.$$

Die Halbirung der zusammengehörigen Büschelwinkel folgt am bequemsten aus der Gleichung

$$\frac{z+1}{z-1} = \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}},$$

aus der unten noch weitere Consequenzen gezogen werden. *Ganz allgemein entsprechen sich in beiden Ebenen die Curven*

29) $$f\left[\left(\frac{P}{Q}\right), \ (\Phi - X)\right] = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2, \ 2(\varphi - \chi)\right] = 0$$

und selbstverständlich auch

30) $$f\left[\sqrt{\frac{P}{Q}}, \ \frac{\Phi - X}{2}\right] = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\left(\frac{p}{q}\right), \ (\varphi - \chi)\right] = 0.$$

So gehen z. B. die oben erwähnten logarithmischen Doppelspiralen

$$\frac{P}{Q} = c\varkappa^{\Phi - X}$$

mit den Grundpunkten ± 1 der Z-Ebene wiederum in logarithmische Doppelspiralen über, und zwar in das System

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = c\varkappa^{2(\varphi - \chi)},$$

oder

$$\frac{p}{q} = \sqrt{c} \cdot \varkappa^{\varphi - \chi}.$$

Um die Resultate dieses Paragraphen zu veranschaulichen, construire man folgende zusammengehörigen Figuren beider Ebenen. Durch die Punkte ± 1 der Z-Ebene zeichne man ein Kreisbüschel, dessen Schnittwinkel mit der reellen Axe eine arithmetische Reihe bilden. Die Orthogonalschaar, welche der Eintheilung in „ähnliche Rechtecke" entspricht, construire man entweder direct, indem man etwa die imaginäre Axe zur Schaar gehören lässt und sie durch reciproke Radii vectores gegen den zweiten willkürlich angenommenen Kreis spiegelt und so fortfährt, oder indirect durch Transformation einer concentrischen Kreisschaar entsprechender Art mittels $Z = \frac{1}{z}$ von beliebigem Punkte aus. Vergl. Fig. 42.

Die zugehörigen Kreise der z-Ebene werden dann sehr leicht folgendermassen gefunden: *Die beiden Büschelkreise der z-Ebene, die einem solchen der andern Ebene entsprechen, haben ihre Mittelpunkte da, wo letzterer die imaginäre Axe schneidet. Ausserdem gehen sie durch* ± 1. Der Beweis folgt aus einer leichten Betrachtung über die Peripheriewinkel.

Der Kreis der z-Ebene, der zu einem Individuum der Orthogonalschaar der Z-Ebene gehört, hat seinen Mittelpunkt an der Stelle der reellen Axe ausserhalb des Einheitskreises, wo der Kreis der Z-Ebene dieselbe schneidet. Er schneidet ausserdem den Einheitskreis reechtwinklig. Der Beweis für letzteres kann so geführt werden: Der Kreis um den Punkt a der reellen Axe der Z-Ebene, welcher den Einheitskreis rechtwinklig schneidet, trifft die Axe in den Punkten $a + \sqrt{a^2 - 1}$ und $a - \sqrt{a^2 - 1}$. Nach § 62 geht er über in die Curve $\frac{p \cdot q}{2r} = \sqrt{a^2 - 1}$, deren Radii vectores von

$$a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad a - \sqrt{a^2 - 1}$$

und Null ausgehen. (Die beiden ersteren Punkte waren soeben genannt.) Dieser Gleichung genügt, wie man sich leicht überzeugt, nur der Kreis um $a + \sqrt{a^2 - 1}$, der den Einheitskreis rechtwinklig schneidet.

Damit ist nun gleichzeitig das einfachste Uebertragungsprincip gefunden.

Um nämlich den Punkt $a + bi$ der Z-Ebene in die andere zu übertragen, lege man durch ihn und die Punkte ± 1 einen Kreis und ausserdem durch ihn einen Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der reellen Axe hat und den andern rechtwinklig schneidet. Die entsprechenden Kreise der z-Ebene construire man nach der eben angegebenen Methode, welche die beiden correspondirenden Schnittpunkte giebt. — Aehnlich geschieht die Bestimmung des Punktes der Z-Ebene, der einem gegebenen der andern entspricht.

Speciell sei bemerkt, dass dem Einheitskreise der Z-Ebene die beiden Kreise um ± 1 mit Radius $\sqrt{2}$ entsprechen, woraus neue Sätze abgeleitet werden können.

§ 66. Den Reciproken der elliptischen Coordinaten um ± 1 der Z-Ebene entspricht das Kreisbüschel durch die Punkte $\pm i$ nebst Orthogonalschaar.

Der isothermischen Spiegelung (Inversion) gegen den Einheitskreis der Z-Ebene entspricht die Spiegelung gegen einen der ihm entsprechenden Kreise um $\pm i$ mit Radius $\sqrt{2}$. Durch die erstere Operation erhält man aus den confocalen Kegelschnitten um ± 1 ihre Reciproken, durch die letztere gehen die entsprechenden Strahlen und Kreise durch resp. um den Nullpunkt der z-Ebene in das Kreisbüschel durch $\pm i$ und die orthogonale Kreisschaar über. Folglich:

Dem Kreisbüschel durch ± 1 und seiner Orthogonalschaar entsprechen die Reciproken der elliptischen Coordinaten um ± 1 gegen den Einheitskreis.

Die Reciproke der gleichseitigen Hyperbel ist eine Lemniscate, und zwar im vorliegenden Falle die Lemniscate $P.Q = 1$ mit den Brennpunkten ± 1. Letztere entspricht den Kreisen des obigen Büschels, die ihr Centrum in den Punkten ± 1 haben. Der isothermischen Spiegelung gegen diese Lemniscate wird demnach die Reciprocität gegen jeden dieser beiden Kreise entsprechen. Unten werden daraus interessante Beziehungen abgeleitet.

Figur 43 stellt das hier behandelte gegenseitige Entsprechen dar.

Um auch hier den einfachsten analytischen Zusammenhang zu finden, werde das Resultat nach unserer Methode verificirt.

Zunächst verwandelt die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ die Ellipsen und Hyperbeln $P \pm Q = c$ mit den Brennpunkten ± 1 in die Curven $\frac{P \pm Q}{R} = c$. Dieser Ausdruck geht durch die Abbildung

$$z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

nach den Gleichungen 10) resp. 14) über in $\frac{p^2 \pm q^2}{t.t_1} = c$, wobei die Radii vectores p, q, t, t_1 von -1, $+1$, $-i$ und $+i$ ausgehen, während die von Null ausgehenden weggefallen sind. Führt man für diese Radii vectores gewöhnliche Coordinaten ein, so entsteht die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 1 = y \cdot \frac{2c}{\sqrt{c^2 - 4}} \quad \text{resp.} \quad x^2 + y^2 - 1 = 2x\sqrt{\frac{4 - c^2}{c^2}}.$$

Das erste ist die Gleichung eines Kreises $r = \frac{2}{\sqrt{c^2 - 4}}$ um den Punkt $\frac{ci}{\sqrt{c^2 - 4}}$ der imaginären Axe, die sich auch schreiben lässt

$$\frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}}{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}}}, \quad \text{oder auch} \quad \left(\frac{t_1}{t}\right) + \frac{1}{\left(\frac{t_1}{t}\right)} = c,$$

wobei t und t_1 wieder von $\pm i$ ausgehen. Das andere ist die Gleichung des Kreises $r = \frac{2}{c}$ um den Punkt $\sqrt{\frac{4 - c^2}{c^2}}$ der reellen Axe, dessen Gleichung auch lautet: $\varphi_1 - \varphi = \arctan \frac{c}{\sqrt{4 - c^2}}$, oder auch $2 \sin(\varphi_1 - \varphi) = c$. Also mit einer geringen Aenderung:

Der Schaar der Reciproken der confocalen Ellipsen mit der Gleichung

$\frac{P+Q}{2R} = c$ *entspricht die Kreisschaar* $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t_1}{t}\right) + \frac{1}{\left(\frac{t_1}{t}\right)}\right] = c,$

der Schaar der Reciproken der confocalen Hyperbeln mit der Gleichung $\frac{P-Q}{2R} = x$ *das Kreisbüschel* $\sin(\varphi_1 - \varphi) = x$, wobei alle Radii vectores von den genannten Punkten ausgehen.

Zwischen beiden Ebenen besteht also die Beziehung, dass sich gegenseitig entsprechen die Curven

31) $f\left[\frac{P+Q}{2R}, \frac{P-Q}{2R}\right] = 0$ und $f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t}+\frac{t}{t_1}\right), \sin(\varphi_1 - \varphi)\right] = 0,$

und ebenso

32) $f\left[\left(\frac{P+Q}{2R} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2R}\right)^2 - 1}\right), \left(\arcsin \frac{P-Q}{2R}\right)\right] = 0$

und

$$f\left[\left(\frac{t_1}{t}\right), \ (\varphi_1 - \varphi)\right] = 0.$$

Auf die Analogie der in diesen Formeln enthaltenen Ausdrücke mit den folgenden:

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ Z + \sqrt{Z^2 - 1}, \ \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + \frac{1}{e^{zi}}\right)$$

und

$$\sin z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} - \frac{1}{e^{zi}}\right)$$

werde kurz aufmerksam gemacht, um damit eine andere Ableitung des Resultats anzudeuten.

Aus dem Gegebenen lassen sich noch einige Sätze beiläufig ableiten. Spiegelung gegen die unter $\pm 45^0$ geneigten Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene verwandelt nämlich das Kreisbüschel durch ± 1 in das Kreisbüschel durch $\pm i$. Folglich gilt entsprechend in der Z-Ebene der früher bewiesene Satz:

Die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel verwandelt das Kreisbüschel durch ihre Brennpunkte nebst Orthogonalschaar in die Reciproken der confocalen Kegelschnitte um diese Punkte.

Ferner: Der Kreis um $+1$ (resp. -1) mit Radius $\sqrt{2}$ verwandelt durch Inversion die Geraden durch Null und die zugehörigen concentrischen Kreise in das Kreisbüschel durch ± 1 und dessen Orthogonalschaar. Folglich entsprechend in der Z-Ebene.

Die isothermische Spiegelung gegen die gewöhnliche Lemniscate verwandelt das Kreisbüschel durch ihre Brennpunkte nebst Orthogonalschaar in die confocalen Kegelschnitte um diese Punkte.

Dasselbe gilt von der in § 54 erwähnten Abbildung

$$Z = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2 - 1}}.$$

§ 67. Weitere Consequenzen der Kreisbeziehungen beider Ebenen.

Die Formel $\frac{z+1}{z-1} = \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}$ des § 65 lässt sich folgendermassen deuten:

Unterwirft man ein Gebilde der z-Ebene der Transformation $\frac{z+1}{z-1}$, so erhält man dasselbe, als wenn man das entsprechende Gebilde der Z-Ebene der Abbildung $\sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}$ unterzieht.

Die involutorischen Transformationen $\frac{z+1}{z-1}$ und $\frac{Z+1}{Z-1}$ entsprechen aber in beiden Ebenen der Reciprocität gegen den Kreis um den Punkt $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$, während die Wurzelausziehung den Uebergang von der gewöhnlichen Geometrie in die lemniscatische bedeutet. (Ausser der Reciprocität ist noch das Umlegen um die reelle Axe zu berücksichtigen, was im Folgenden nicht mehr besonders hervorgehoben werden soll.)

Nun geht aber jedes Kreisbüschel durch die Punkte $a+bi$ und a_1+b_1i der Z-Ebene durch die Abbildung $\sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}$ in ein Lemniscatenbüschel durch die beiden Punktpaare

$$\sqrt{\frac{a+bi+1}{a+bi-1}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{a_1+b_1i+1}{a_1+b_1i-1}}$$

über, folglich muss letztere Curvengruppe, der Umkehrung der Transformation $\frac{z+1}{z-1}$ unterworfen, die übrigens genau ebenso lautet, auf Curvenschaaren führen, welche dem obigen Kreisbüschel der Z-Ebene entsprechen. Also:

Dem Kreisbüschel durch die Punkte $a+bi$ und a_1+b_1i der Z-Ebene und seiner Orthogonalschaar entsprechen die Reciproken des Lemniscatenbüschels durch die Punktpaare

$$\sqrt{\frac{a+bi+1}{a+bi-1}} \quad \textit{und} \quad \sqrt{\frac{a_1+b_1i+1}{a_1+b_1i-1}}$$

der z-Ebene gegen den Kreis um den Punkt $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$.

Mit andern Worten: *Die in* § 61 *behandelten Büschel und Schaaren der Isothermen 3ten und 4ten Grades der z-Ebene sind Reciproke von Lemniscaten-Büscheln und -Schaaren gegen den genannten Kreis.*

Da nun der Spiegelung gegen diesen Kreis in der z-Ebene die Spiegelung gegen die Lemniscate $P \cdot Q = 1$ um die Punkte ± 1 der Z-Ebene entspricht, so folgt, dass die genannten Lemniscatenschaaren

der s-Ebene durch die Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)$ in Curven übergehen, die durch Spiegelung der ursprünglichen Kreissysteme gegen die Lemniscate entstehen.

Von besonderem Interesse ist folgender Fall: Die Geraden durch den Nullpunkt der Z-Ebene nebst Orthogonalschaar gehen nach der „lemniscatischen Geometrie“ (Cap. VI) durch isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate in ein Büschel von Schleifenlemniscaten durch ± 1 und Null nebst der Orthogonalschaar von Lemniscaten über. Folglich:

Das Lemniscatenbüschel durch die Punkte ± 1 *und Null der Z-Ebene entspricht dem Lemniscatenbüschel durch die Punkte* $\pm i$ *und* ± 1 *der s-Ebene; auch die beiden Orthogonalschaaren von Lemniscaten entsprechen einander.*

Dieser Fall ist durch Figur 44 erläutert, wobei wiederum dem Innern des Einheitskreises das untere Blatt der Z-Ebene entspricht. Die isothermischen Deutungen dieser Zeichnungen mögen dem Leser überlassen bleiben. Die „lemniscatische Geometrie“ gab Näheres über diese Systeme.

Verification des Resultates und Formulirung der analytischen Beziehung beider Ebenen geschehe auch hier nach der früheren Methode: Nach Cap. VI hat das Büschel von Lemniscaten durch ± 1 und Null die Gleichung

$$\Phi + X - 2\Theta = \gamma,$$

die Orthogonalschaar die Gleichung $\frac{P \cdot Q}{R^2} = c$, wobei die Radii vectores von ± 1 und Null ausgehen. Nach den Formeln 10) und 11) entstehen durch die Abbildung $s = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ aus ihnen die Curven

$$2\,[(\varphi + \chi) - (\psi + \psi_1)] = \gamma \quad \text{und} \quad \left(\frac{p \cdot q}{t \cdot t_1}\right)^2 = c,$$

deren Radii vectores von ± 1 und $\pm i$ ausgehen, während die vom Nullpunkte ausgehenden sich gehoben haben. Nach Cap. VI sind dies aber die Gleichungen eines Lemniscatenbüschels durch die genannten Punkte und der orthogonalen Lemniscatenschaar.

Ganz allgemein entsprechen sich in beiden Ebenen Curven, deren Gleichungen in diesen lemniscatischen Coordinaten sind:

33) $$f\left[\left(\frac{P \cdot Q}{R^2}\right),\ (\Phi + X - 2\Theta)\right] = 0$$

und

$$f\left[\left(\frac{p \cdot q}{t \cdot t_1}\right)^2,\ 2(\varphi + \chi - (\psi + \psi_1))\right] = 0,$$

wobei die Radii vectores von den Punkten ± 1 *und Null der Z-Ebene resp. von denen der z-Ebene* ± 1 *und* $\pm i$ *ausgehen.*

In derselben Weise lässt sich die obige Relation auch in der Form

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = \frac{Z+1}{Z-1}$$

verwerthen, die man dahin deuten kann, dass die Transformation entsprechender Gebilde mittels der beiden gleichgesetzten Functionen auf identische Gebilde führt. In der Z-Ebene handelt es sich dabei wieder um die Inversion gegen den Kreis um $+1$ mit Radius $\sqrt{2}$, in der z-Ebene um dasselbe, ausserdem aber noch um die Quadrirung, bei welcher bekanntlich der Neigungswinkel jedes von Null ausgehenden Radiusvectors verdoppelt, er selbst aber gemäss der Proportion $1 : r = r : r^2$ quadrirt wird. Bekanntlich wird nun jedes Kreisbüschel der z-Ebene durch $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ nebst Orthogonalschaar durch die Abbildung $\frac{z+1}{z-1}$ in ein Kreisbüschel durch

$$\frac{a+bi+1}{a+bi-1} \quad \text{und} \quad \frac{a_1+b_1 i+1}{a_1+b_1 i-1}$$

nebst Orthogonalschaar, dieses aber durch Quadrirung in ein Büschel *Pascal'scher Schneckenlinien* (limaçons) durch die Punkte

$$\left(\frac{a+bi+1}{a+bi-1}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{a_1+b_1 i+1}{a_1+b_1 i-1}\right)^2$$

nebst Orthogonalschaar von Curven derselben Art verwandelt. Diese Curven verwandeln sich aber in der Z-Ebene durch die Umkehrung der Abbildung $\frac{Z+1}{Z-1}$, die wiederum ebenso lautet, in die den ursprünglichen Kreisen entsprechenden Systeme. Folglich:

Jedem Kreisbüschel der z-Ebene durch die Punkte $a + bi$ *und* $a_1 + b_1 i$ *entspricht in der Z-Ebene ein Curvenbüschel durch die Punkte* $\frac{1}{2}\left(a + bi + \frac{1}{a+bi}\right)$ *und* $\frac{1}{2}\left(a_1 + b_1 i + \frac{1}{a_1+b_1 i}\right)$, *welches durch Inversion mittels des Kreises um* $+1$ *mit Radius* $\sqrt{2}$ *aus einem Büschel Pascal'scher Schneckenlinien (im speciellen Falle Cardioiden oder auch Parabeln) erzeugt werden kann. Von den Orthogonalschaaren gilt dasselbe.*

Somit ist auch für die in § 63 behandelten Curven die geometrische Deutung gefunden.

Da die confocalen Kegelschnitte um die Punkte ± 1 der Z-Ebene die Abbildungen von Kreisen und Geraden sind, so ergiebt sich beiläufig ein Specialfall des bekannten Satzes, *dass diese Kegelschnitte, gegen einen Kreis um einen der Brennpunkte (hier den spe-*

ciellen Kreis mit Radius $\sqrt{2}$) gespiegelt, auf Pascal'sche Schneckenlinien führen. Dasselbe gilt aus gleichem Grunde von den obigen Reciproken der Kegelschnitte. Auch die Lemniscate $P \cdot Q = 1$ der Z-Ebene mit den Brennpunkten ± 1 geht durch Inversion gegen diesen Kreis in eine Pascal'sche Schneckenlinie über, weil sie zwei Kreisen der z-Ebene entspricht.

Aus letzterem erledigt sich eine zur Gleichung 14) gemachte Bemerkung.

Da endlich die Kreise der z-Ebene, gegen die Kreise und Geraden um resp. durch Null gespiegelt, wieder Kreise geben, so folgt, *dass die isothermische Spiegelung gegen alle Individua der confocalen Ellipsen und Hyperbeln die hier auftretenden limaçons wiederum in solche verwandelt.*

In gleicher Weise lassen sich noch zahlreiche andere Beziehungen aus dem Vorangegangenen mit Leichtigkeit ableiten. Von diesen sei noch ein Beispiel angegeben.

Das Isothermenbüschel 3ten Grades durch $\pm i$ nebst Orthogonalschaar (Fig. 40) der z-Ebene geht durch Umklappen um die Gerade durch Null mit Neigung 45^0 in ein congruentes Büschel durch ± 1 nebs Orthogonalschaar über; die isothermische Spiegelung gegen die gleichseitige Hyperbel der Z-Ebene, welche der genannten Geraden entspricht, verwandelt nach der „lemniscatischen Geometrie" das Strahlenbüschel durch Null nebst concentrischer Kreisschaar in die confocalen Lemniscaten um die Punkte ± 1 nebst orthogonalem gleichseitigem Hyperbelbüschel durch beide Punkte. Folglich:

In beiden Ebenen entsprechen sich die genannten confocalen Lemniscaten und orthogonalen Hyperbeln einerseits und die um 90^0 gedrehten Isothermen 3ten resp. 4ten Grades durch resp. um $\pm i$ andrerseits.

Dieses gegenseitige Correspondiren ist in Figur 45 dargestellt.

Der Vollständigkeit halber sei endlich noch gezeigt, wie sich analytisch mittels der Bicirculcoordinaten mit den Grundpunkten ± 1 die Geometrie der z-Ebene in die der Z-Ebene übertragen lässt. Der Kreis $\varrho = c$ um den Punkt $a + bi$ der ersteren und die Gerade $\varphi = \gamma$ durch diesen Punkt gehen nämlich durch die Abbildung $Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ in Curven über, deren Gleichung in Polarcoordinaten, die auf den Nullpunkt bezogen sind, lautet:

$$\sqrt{(a-1)^2 + b^2} \sqrt{\frac{R - 2\sqrt{R}\left(a_1 \cos\frac{\Theta}{2} + b_1 \sin\frac{\Theta}{2}\right) + a_1^2 + b_1^2}{R - 2\sqrt{R}\cos\frac{\Theta}{2} + 1}} = c,$$

$$\arctan \frac{\sqrt{R}\sin\frac{\Theta}{2} - b_1}{\sqrt{R}\cos\frac{\Theta}{2} - a_1} - \arctan \frac{\sqrt{R}\sin\frac{\Theta}{2}}{\sqrt{R}\cos\frac{\Theta}{2} - 1} + \alpha = \gamma,$$

wo

$$a_1 = \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a-1)^2 + b^2}, \quad b_1 = \frac{2b}{(a-1)^2 + b^2}, \quad \alpha = \arctan\frac{b}{a-1} \text{ ist.}$$

Diese Gleichungen gehen durch die Abbildung $\frac{Z+1}{Z-1}$ in gleichlautende über, nur dass $\frac{P}{Q}$ an Stelle von R und $\Phi - X$ an Stelle von Θ zu setzen ist, wobei die Radii vectores von ± 1 ausgehen. Die so umgeschriebenen Gleichungen sind die des Büschels und der Schaar Pascal'scher Schneckenlinien, die dem Strahlenbüschel $\varphi = \gamma$ und der Kreisschaar $\varrho = c$ entsprechen, und zwar in Bicircularcoordinaten mit den Grundpunkten ± 1.

Die der confocalen Ellipsen und Hyperbeln lauten z. B.

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{P}{Q}\right) + 2\sqrt{\frac{P}{Q}}\cos\frac{\Phi - X}{2} + 1}{\left(\frac{P}{Q}\right) - 2\sqrt{\frac{P}{Q}}\cos\frac{\Phi - X}{2} + 1}} = c,$$

$$\arctan \frac{\sqrt{\frac{P}{Q}}\sin\frac{\Phi - X}{2}}{\sqrt{\frac{P}{Q}}\cos\frac{\Phi - X}{2} + 1} - \arctan \frac{\sqrt{\frac{P}{Q}}\sin\frac{\Phi - X}{2}}{\sqrt{\frac{P}{Q}}\cos\frac{\Phi - X}{2} - 1} = \gamma.$$

§ 68. Schlussbemerkungen.

Die Methode des § 62 lässt sich auch auf die allgemeinere Function

$$Z = \frac{a s^2 + b s + c}{a_1 s^2 + b_1 s + c_1}$$

anwenden, deren Umkehrung

$$s = \frac{-(b - b_1 Z) + \sqrt{(b - b_1 Z)^2 - 4(a - a_1 Z)(c - c_1 Z)}}{2(a - a_1 Z)}$$

ist. Aus der Zerlegbarkeit des Zählers und Nenners in je zwei Factoren 1ten Grades ergiebt sich mit Hülfe der conjugirten Gleichung, dass den Kreisen um den Nullpunkt der Z-Ebene im Wesentlichen Curven $\frac{p \cdot p_1}{q \cdot q_1} = c$ entsprechen, den Geraden im Wesentlichen Curven $(\varphi + \varphi_1) - (\chi + \chi_1) = \gamma$. Aehnliches gilt von den Kreisen um andere Punkte. Die Z-Ebene ist wieder als zweiblättrig, die s-Ebene als einblättrig anzunehmen. Die beiden Windungspunkte sind leicht zu bestimmen, indem man die Wurzel gleich Null setzt.

Es ist nicht nöthig, näher hierauf einzugehen, da die gebrochenen rationalen Functionen später der allgemeinen Discussion unterworfen werden.

Interessante Verwandtschaften, über welche die wichtigeren Sätze leicht ausgesprochen werden können, erhält man ferner, wenn man eine Hülfsebene mit dem Argumente ζ den Abbildungen

$$Z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2}\left(a\zeta + \frac{1}{a\zeta}\right)$$

unterwirft, so dass man zwischen den beiden anderen Ebenen die Beziehung

$$Z = \frac{1}{2}\left[\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{a} + \frac{a}{z + \sqrt{z^2 - 1}}\right]$$

hat. Hierbei entsprechen sich confocale Kegelschnitte mit den Brennpunkten ± 1. Ist z. B. a reell, so entsprechen sich identische Hyperbeln, aber verschiedene Ellipsen beider Ebenen, ist a von der Form $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, so entsprechen sich identische Ellipsen, aber verschiedene Hyperbeln. Auch gewisse Systeme Pascal'scher Schneckenlinien entsprechen sich in beiden Ebenen. Man gelangt also auf diesem Wege zu gewissen *bifocalen Verwandtschaften*. Aehnliches tritt ein, wenn die ζ-Ebene der Transformation mittels zweier verschiedener gebrochener Functionen 2ten Grades unterworfen wird.

§ 69. Litteratur.

1) Die im Anfang des § 60 angegebene Methode lernte Verfasser in einer Vorlesung des Herrn Prof. H. A. Schwarz im Jahre 1867 kennen. Dort wurden auch die Kreisbeziehungen des § 65 angedeutet, jedoch auf anderem Wege. Dasselbe gilt von der entsprechenden Riemann'schen Fläche.

2) Die confocalen Ellipsen und Hyperbeln bespricht Lamé in § CXVIII S. 195 der Leçons sur les coordonnés curvilignes. Paris 1859. Die elliptischen Coordinaten wurden aber zuerst gegeben von Jacobi, Crelle's Journal, XII, S. 137. Brief an Steiner.

3) Die Transformationen

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{und} \quad z = Z - \sqrt{Z^2 - 1}$$

siehe bei Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, I. S. 49, Anwendungen derselben an vielen Stellen dieses Werkes.

4) Zu wichtiger Anwendung kommt die Transformation

$$z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

bei H. A. Schwarz: Notizia sulla rappresentazione conforme di

un'area ellitica sopra un'area circolare. Annali di Mathematica pura ed applicata. Serie II. T. III. Ebenso bei

Hentschel: Ueber einige conforme Abbildungen. Inauguraldissertation, Jena 1871. Derselbe: Conforme Abbildung etc. Programm 1874 des Gymnasiums Salzwedel.

5) Hydrodynamisches über die confocalen Kegelschnitte siehe bei Auerbach: Theoretische Hydrodynamik, S. 39.

6) Kinematisches über bifocale Systeme findet sich bei Burmester: Ueber das bifocal veränderliche System. Math. Ann. XVI.

7) Eine Anzahl der hier behandelten Systeme hat A. Guébhard experimentell wiedergegeben. Man vergleiche: Figuration électrochimique des lignes équipotentielles sur des portions quelconques du plan; Bulletins de la Société Physique. 1882.

Neuntes Capitel.

Die Abbildungen $z = \sqrt[n]{Z}$ und $z = \sqrt[m]{\frac{aZ^n + b}{cZ^n + d}}$ nebst ihren Umkehrungen.

§ 70. Allgemeines über die Abbildungen $z = \sqrt[n]{Z}$ und $Z = z^n$ bei ganzen, positiven, reellen Exponenten.

Der Zusammenhang beider Ebenen ist schon in § 4 und 5 erläutert worden. Die Z-Ebene ist als n-blättrig mit dem Nullpunkte als Windungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu denken, durch dessen Umkreisen man ohne Sprung von einem Blatte aus in die anderen gelangen kann. Jeder Sector $\frac{\pi}{n}$ der z-Ebene entspricht einem solchen Blatte. Durch Figur 7 wurde die Z-Ebene für den Fall $n = 2$ versinnlicht. Figur 46a. giebt in gleicher Weise das Schema der Z-Ebene für den Fall $n = 3$, während 46b. die entsprechenden Sectoren der Z-Ebene darstellt. Eine beliebige Linie, die vom Nullpunkte der Z-Ebene aus, ohne sich selbst zu schneiden, nach dem unendlichen Bereiche gezogen wird, kann als Grenze der einzelnen Blätter aufgefasst werden. Bei der Ueberschreitung dieses *„Verzweigungsschnittes"* gelangt ein wandernder Punkt stets ohne Unstetigkeit in ein anderes Blatt. Nach n Umgängen um den Windungspunkt muss man aber in das erste Blatt zurückgelangen, und dieser Umstand ist es, der den gezeichneten Modellen eine Unwahr-

scheinlichkeit giebt. Das n^{te} Blatt nämlich muss die übrigen mit Ausnahme des ersten durchkreuzen, *ohne mit ihnen im Zusammenhange zu stehen*, und sich so mit dem ersten vereinigen. An Figur 46a, wo der Bequemlichkeit halber der Verzweigungsschnitt in die positive reelle Axe gelegt ist, wird man sich diese Forderung leicht klar machen.

Der Nullpunkt ist der eine Endpunkt des Verzweigungsschnittes, in ihm hängen also alle Blätter zusammen, genau so, wie in der z-Ebene alle Sectoren sich im Nullpunkte vereinigen. Dies versinnlicht den Umstand, dass $\sqrt[n]{Z}$ für $Z = 0$ eindeutig ist.

Passirt ein wandernder Punkt den Nullpunkt der Z-Ebene, so kann er die Wanderung in einem beliebigen der n Blätter ohne Unstetigkeit fortsetzen. Denkt man sich den Weg in allen Blättern zugleich fortgesetzt, also in n Zweige gegabelt, so entsprechen den letzteren n Wege in der z-Ebene, die unter gleichen Winkeln $\frac{2\pi}{n}$ aufeinander folgen. Der Name Verzweigungspunkt für den erstgenannten Punkt ist also durchaus zweckmässig.

Nimmt man nur *einen* unendlichen Punkt als vorhanden an, so müssen auch in diesem, als dem zweiten Endpunkte des Verzweigungsschnittes, alle Blätter zusammenhängen. Er verhält sich also ebenso, wie der Nullpunkt.

Man hat nun *„wirklich geschlossene“* und nur *„scheinbar geschlossene“* Curven in der Z-Ebene zu unterscheiden. Jede in sich zurücklaufende Curve ist wirklich geschlossen, wenn sie den Nullpunkt entweder gar nicht, oder $n$mal umschliesst. Dann ist auch ihre Abbildung in der z-Ebene geschlossen. In jedem andern Falle ist der Schluss nur ein scheinbarer, wie man sofort an der entsprechenden Curve der z-Ebene erkennt, deren Anfangs- und Endpunkt in verschiedenen Sectoren liegen.

Jedes Umkreisen des Nullpunktes ist zugleich ein Umkreisen des unendlichen Punktes im entgegengesetzten Sinne; denn hat man den ersteren bei der Wanderung zur Linken, so hat man den andern zur Rechten. Man veranschaulicht sich dies bequem, indem man die Ebene wieder als unendlich grosse Kugel betrachtet, auf welcher der unendliche Punkt der Antipode des Nullpunktes ist.

Diese elementaren Betrachtungen geben die einfachste Einführung in die Riemann'sche Darstellungsweise, die mit den später zu untersuchenden Functionen an Schwierigkeit zunimmt.

Aus $Z = z^n$ oder $R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ folgt zunächst

1) $$R = r^n, \qquad \Phi = n\varphi,$$

2) $$\sqrt[n]{R} = r, \qquad \frac{\Phi + 2k\pi}{n} = \varphi,$$

wo k die Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen kann. Diese Vieldeutigkeit ist schon in § 5 erörtert worden. Sieht man von dem Zusatze $\frac{2k\pi}{n}$ ab, so entsprechen sich in beiden Ebenen die Curven

3) $$f(R, \Phi) = 0 \quad \text{und} \quad f(r^n, n\varphi) = 0,$$

4) $$f\left(\sqrt[n]{R}, \frac{\Phi}{n}\right) = 0 \quad \text{und} \quad f(r\varphi) = 0.$$

Dass Kreise $R = c$ und $r^n = c$ oder $r = \sqrt[n]{c}$, dass ferner Gerade $\Phi = \gamma$ und $n\varphi = \gamma$ oder $\varphi = \frac{\gamma + 2k\pi}{n}$ sich entsprechen, ist selbstverständlich. Jeder Punkt der z-Ebene kann *elementar* in die Z-Ebene übertragen werden, während das Umgekehrte nur in gewissen Specialfällen mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann. Daraus wird sich ein ganz verschiedenes Verhalten der sich entsprechenden Curvensysteme ergeben.

Die Verwandtschaft beider Ebenen ist eine isogonale. Die Conformität wird nur im Nullpunkte und im unendlichen Punkte beider gestört, denn dort wird der Differentialquotient

$$Z' = nz^{n-1} = nr^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi]$$

Null resp. unendlich gross, d. h. das Vergrösserungsverhältniss wird verschwindend klein resp. unendlich gross. Für die übrigen Punkte ist nr^{n-1} der Vergrösserungsfactor. Die Abweichung $(n-1)\varphi$ giebt die Verdrehung entsprechender Linienelemente beider Ebenen gegen einander an. Vergl. § 39.

§ 71. Den Geraden der Z-Ebene entsprechen reguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung.

Zur Untersuchung der Curven, welche den Geraden der Z-Ebene entsprechen, werde der in § 42 angegebene Weg eingeschlagen. Die Gleichung der Geraden, die von dem Punkte $a + bi$ der Z-Ebene in der Richtung γ ausgeht, ist

$$\frac{Y-b}{X-a} = \tan\gamma,$$

sie lässt sich also schreiben:

$$\gamma = \operatorname{arc\,tan}\frac{Y-b}{X-a} = \frac{1}{2i}\lg\frac{X-a+i(Y-b)}{X-a-i(Y-b)} = \frac{1}{2i}\lg\frac{(X+Yi)-(a+bi)}{(X-Yi)-(a-bi)}.$$

Durch die Abbildung $x + yi = \sqrt[n]{X+Yi}$ geht sie über in:

5) $$\frac{1}{2i}\lg\frac{(x+yi)^n-(a+bi)}{(x-yi)^n-(a-bi)}$$

$$=\frac{1}{2i}\{\lg[(x+yi)^n-(a+bi)]-\lg[(x-yi)^n-(a-bi)]\}=\gamma.$$

Jeder der Ausdrücke $(x\pm yi)^n-(a\pm bi)$ lässt sich bei ganzem, positiven, reellen n in ein Product von n Factoren von der Form $x\pm yi-\sqrt[n]{a\pm bi_x}$ zerlegen, wobei bekanntlich

$$\sqrt[n]{a\pm bi_x}=\sqrt[2n]{a^2+b^2}\left[\cos\frac{\arctan\frac{b}{a}+2x\pi}{n}\pm i\sin\frac{\arctan\frac{b}{a}+2x\pi}{n}\right]$$

Der Bruch in Gleichung 5) zerlegt sich also in ein Product von n Brüchen, deren Zähler und Nenner bei geeigneter Anordnung conjugirt sind, so dass man, indem zugleich statt des Logarithmus des Products die Summe der Logarithmen gesetzt wird, Folgendes erhält:

$$\sum_{x=0}^{x=n-1}\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-\sqrt[n]{a+bi_x}}{x-yi-\sqrt[n]{a-bi_x}}$$

$$=\sum_{x=0}^{x=n}\arctan\frac{\frac{1}{i}[x+yi-\sqrt[n]{a+bi_x}-(x-yi-\sqrt[n]{a-bi_x})]}{x+yi-\sqrt[n]{a+bi_x}+x-yi-\sqrt[n]{a-bi_x}}=\gamma,$$

oder endlich

6) $$\sum_{x=0}^{x=n}\arctan\frac{y-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\cdot\sin\frac{\arctan\frac{b}{a}+2x\pi}{n}}{x-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\cdot\cos\frac{\arctan\frac{b}{a}+2x\pi}{n}}=\gamma.$$

Diese Gleichung lässt sich in überraschend einfacher Weise geometrisch deuten. Verbindet man nämlich irgend einen Punkt $x+yi$ mit den n durch $\sqrt[n]{a+bi}$ repräsentirten Punkten, so bilden die Verbindungslinien mit der reellen Axe Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, für welche

$$\tan\varphi_x\frac{y-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\cdot\sin\frac{\arctan\frac{b}{a}+2x\pi}{n}}{x-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\cdot\cos\frac{\arctan\frac{b}{a}+2x\pi}{n}},$$

so dass man statt Gleichung 6) auch schreiben kann

7) $$\varphi_1+\varphi_2+\cdots\varphi_n=\gamma.$$

Das Resultat ist folgendes:

Die durch den Punkt $a + bi$ gehende Gerade, welche mit der positiven reellen Axe den Winkel γ bildet, geht durch die Abbildung $x + yi = \sqrt[n]{X + Yi}$, wo n positiv, ganz und reell ist, in die Curve $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \gamma$ über, wobei die φ die Winkel sind, welche die von den Punkten $\sqrt[n]{a + bi}$ ausgehenden Radii vectores jedes Curvenpunktes mit der positiven reellen Axe bilden.

Die so definirten Curven nannte der Verfasser in seiner Abhandlung über die vorliegende Abbildung im 83. Bande des Crelle'schen Journals *Hyperbeln n^{ter} Ordnung*, da sie für $n = 2$ in gleichseitige Hyperbeln übergehen und vielfache Analogien mit denselben haben. Da jedoch später noch eine Erweiterung des Begriffs eintritt, mögen sie, da die Ausgangspunkte ihrer Radii vectores ein regelmässiges Polygon bilden, als *reguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung* bezeichnet werden.

Die-Gleichungen 5) und 6) sind vollständig identisch. Die linke Seite von Gleichung 6) ist also der von i befreite imaginäre Theil der Function complexen Arguments

$$f(x + yi) = \lg\,[(x + yi)^n - (a + bi)]$$

und muss als solcher der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügen.

Uebrigens lässt sich statt der Gleichung 6) noch eine andere substituiren, aus der allerdings die geometrische Eigenschaft 7) nicht erkannt werden kann. Die Gleichung der behandelten Geraden lautet nämlich in Polarcoordinaten

$$\frac{R \sin \Phi - b}{R \cos \Phi - a} = \tan \gamma,$$

sie geht also durch unsere Transformation über in

$$8) \qquad \frac{r^n \sin n\varphi - b}{r^n \cos n\varphi - a} = \tan \gamma.$$

Dies ist die Gleichung der Hyperbeln n^{ter} Ordnung in Polarcoordinaten. In der Gestalt

$$9) \qquad \arctan \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\left(n \arctan \frac{y}{x}\right) - b}{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\left(n \arctan \frac{y}{x}\right) - a} = \gamma$$

ist sie identisch mit Gleichung 6) und ihre linke Seite muss also gleichfalls der partiellen Differentialgleichung genügen.

Nimmt γ die Werthe einer arithmetischen Reihe an, so entsteht

das isothermische Büschel der gleichseitigen Hyperbeln n^{ter} Ordnung, welches durch die Abbildung

$$Z = \lg [z^n - (a + bi)]$$

in die Parallelenschaar $Y = \gamma$ übergeht.

In Figur 47 stellen die asymptotischen Curven die Hyperbeln 4ter Ordnung dar. Dieses specielle System wurde zuerst von Haton de la Goupillière in dessen „Mémoire sur une nouvelle théorie générale des lignes isothermes et du potential cylindrique", 38. Heft des Journals de l'École Polytechnique, gezeichnet. Unserer Zeichnung ist die dortige zu Grunde gelegt, jedoch stellten sich mehrfache Modificationen als nothwendig heraus. Es handelt sich um einen der Fälle, die elementar durchconstruirt werden können. Als Grenzcurve ist der Vergleichung halber ein Kreis gezeichnet. Die Figur ist leicht elektrodynamisch zu deuten.

§ 72. Den Kreisen der Z-Ebene entsprechen reguläre Lemniscaten n^{ter} Ordnung.

Die Gleichung des Kreises $\varrho = c$ um den Punkt $a + bi$ der Z-Ebene lässt sich schreiben

$$[X + Yi - (a + bi)] \cdot [X - Yi - (a - bi)] = c^2,$$

sie geht also durch unsere Abbildung über in

$$[(x + yi)^n - (a + bi)] \cdot [(x - yi)^n - (a - bi)] = c^2,$$

oder, wenn jede Klammer in ihre n Factoren zerlegt wird, in

$$8) \quad \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \left[(x+yi) - \sqrt[n]{a+bi_\varkappa}\right] \cdot \left[(x-yi) - \sqrt[n]{a-bi_\varkappa}\right] = c^2,$$

wo die Wurzelausdrücke dieselbe Bedeutung, wie in § 71 haben, und zu zweien conjugirt sind, so dass man n reelle Factoren zweiten Grades erhält, nämlich

$$9) \quad \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \left[\left(x - \sqrt[2n]{a^2+b^2} \cdot \cos \frac{\arctan \frac{b}{a} + 2\varkappa\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sqrt[2n]{a^2+b^2} \cdot \sin \frac{\arctan \frac{b}{a} + 2\varkappa\pi}{n}\right)^2\right] = c^2.$$

Hier stellt jeder Factor das Quadrat der Entfernung jedes Punktes $x + yi$ von einem der durch $\sqrt[n]{a+bi}$ repräsentirten Punkte dar. Bezeichnet man diese Entfernungen mit $p_1, p_2 \ldots, p_n$, so erhält man nach Ausziehung der Quadratwurzel als Gleichung der Curve

$$10) \quad p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = c.$$

Also:

Die vorliegende Abbildung verwandelt den Kreis $\varrho = c$ *um* $a + bi$ *in die Curve* $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = c$, *deren Radii vectores von den Punkten* $\sqrt[n]{a + bi}$ *ausgehen.*

Da diese Curven für $n = 2$ Lemniscaten (Cassini-Curven) werden, ihre Radii vectores aber von den Ecken eines regulären Polygons ausgehen, so wurden sie vom Verfasser als *reguläre Lemniscaten höherer Ordnung* bezeichnet.

Nicht in der Form 9), sondern in der Form

$$11)\quad \frac{1}{2}\left\{\lg\left[(x+yi)^n-(a+bi)\right]+\lg\left[(x-yi)^n-(a-bi)\right]\right\}=c_1,$$

also, reell geschrieben

$$12)\quad \frac{1}{2}\lg\prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}\left[\left(x-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\cdot\cos\frac{\arctan\frac{b}{a}+2\varkappa\pi}{n}\right)^2+\left(y-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\cdot\sin\frac{\arctan\frac{b}{a}+2\varkappa\pi}{n}\right)^2\right]=c_1,$$

wo $c_1 = \lg c$ ist, genügt die linke Seite der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

da sie als reeller Theil der Function

$$f(x+yi)=\lg\left[(x+yi)^n-(a+bi)\right]$$

zu betrachten ist.

Durch die Abbildung $X + Yi = \lg\left[(x + yi)^n - (a + bi)\right]$ kann man dieses isothermische Curvensystem in das System der parallelen Geraden $Y = c_1$ verwandeln. Es handelt sich selbstverständlich um die Orthogonalcurven der regulären Hyperbeln n^{ter} Ordnung.

Auch die Gleichung dieses Systems lässt sich in einfacherer Gestalt schreiben, indem man Polarcoordinaten anwendet. Die Kreisgleichung lautet dann:

$$R^2 - 2R\left[a\cos\Phi - b\sin\Phi\right] + a^2 + b^2 = c^2$$

und geht durch die Abbildung über in die Curvengleichung

$$13)\quad r^{2n} - 2r^n\left[a\cos(n\varphi) - b\sin(n\varphi)\right] + a^2 + b^2 = c^2.$$

Schreibt man diese wieder in der Form

$$14)\quad \frac{1}{2}\lg\left[(x^2+y^2)^n-2(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\left\{a\cos\left(n\arctan\frac{y}{x}\right)+b\sin\left(n\arctan\frac{y}{x}\right)\right\}+a^2+b^2\right]=c_1,$$

so ist sie mit Gleichung 12) identisch und genügt wieder der Differentialgleichung $\Delta U = 0$.

In Figur 47 sind die geschlossenen Curven reguläre Lemniscaten 4ter Ordnung.

Das Gesammtresultat der § 71 und 72 lässt sich dahin zusammenfassen:

Bei den Abbildungen $Z = z^n$ *und* $z = \sqrt[n]{Z}$ *entsprechen sich in beiden Ebenen die Curvenschaaren*

$f(P, \Theta) = 0$ und $f[(p_1 . p_2 \dots p_n), (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n)] = 0$,

wobei die Polarcoordinaten P *und* Θ *auf den Punkt* $a + bi$ *der Z-Ebene, die lemniscatischen Coordinaten auf die Punktgruppe* $\sqrt[n]{a + bi}$ *bezogen sind.*

Sind ferner Curvengruppen der Z-Ebene in lemniscatischen Coordinaten m^{ter} Ordnung, bezogen auf die Punkte $\sqrt[m]{a + bi}$, gegeben, so entsprechen ihnen in der z-Ebene Curvengruppen in lemniscatischen Coordinaten $m . n^{ter}$ Ordnung, bezogen auf die Punkte $\sqrt[m.n]{a + bi}$. Es gehören also auch folgende Gleichungen zusammen:

$$f[(P_1 P_2 \cdot \dots \cdot P_m), (\Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_m)] = 0, \text{ und}$$
$$f[(p_1 . p_2 \cdot \dots \cdot p_{mn}), (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_{mn})] = 0.$$

§ 73. Wichtigere Eigenschaften der Hyperbeln n^{ter} Ordnung; die orthogonalen Hyperbelschaaren n^{ter} Ordnung.

1) Entspricht die Hyperbel n^{ter} Ordnung der Geraden $X = a$ oder $R \cos \Phi = a$, oder der Linie $\gamma = \frac{\pi}{2}$ durch den Punkt a, so lautet ihre Gleichung

a) $$r^n \cdot \cos n\varphi = a,$$

oder

b) $$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \frac{\pi}{2},$$

wobei die Radii vectores von den Punkten $\sqrt[n]{a}$ ausgehen.

2) Für $r = \infty$ ist $\cos n\varphi = 0$, also $\varphi = \frac{90^0 + 2\varkappa\pi}{n}$. Dies giebt die Neigungswinkel der Asymptoten für die n congruenten Curvenarme. Es sind n durch das Centrum (den Nullpunkt) gehende Symmetrie-Axen vorhanden, die unter gleichen Winkeln auf einander folgen und bei ungeradem n sämmtlich, bei geradem n zur Hälfte durch die Scheitelpunkte der Curve gehen.

3) Für $\varphi = \frac{2\varkappa\pi}{n}$ ergiebt sich $r = \sqrt[n]{a}$, wodurch die Entfernung der Scheitelpunkte vom Centrum bestimmt ist.

4) $R \cos (\Phi - \alpha) = a$ ist die Polargleichung der allgemeinen

Geraden, wobei a ihre Entfernung vom Nullpunkte bedeutet. Die entsprechende Hyperbel n^{ter} Ordnung hat die Gleichung

c) $$r^n \cos n\left(\varphi - \frac{\alpha}{n}\right) = a.$$

Sie ist gegen die Hyperbel a) um den Winkel $\frac{\alpha}{n}$ gedreht und mit ihr offenbar congruent. Variirt hingegen der Parameter a, so werden die Curven ähnlich.

5) Wie sich die Gerade als Kreis betrachten lässt, dessen Centrum im Unendlichen liegt, so lässt sich die Hyperbel n^{ter} Ordnung als Lemniscate n^{ter} Ordnung betrachten, deren Brennpunkte im Unendlichen liegen.

6) Gehen p und q von zwei festen Punkten $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ aus, so ist der durch $p = q$ dargestellte geometrische Ort eine Gerade. Folglich: Die Gleichung

d) $$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n,$$

wo die p von der Punktgruppe $\sqrt[n]{a + bi}$, die q von der Punktgruppe $\sqrt[n]{a_1 + b_1 i}$ ausgehen, stellt eine Hyperbel n^{ter} Ordnung dar. In Worten:

Verbindet man einen Punkt mit den Eckpunkten zweier concentrischer regelmässiger Polygone gleicher Seitenzahl, die beliebig gegen einander verdreht sind, und bewegt er sich so, dass das Product der einen Strahlengruppe stets gleich dem der andern ist, so beschreibt er eine Hyperbel n^{ter} Ordnung.

7) *Ist dabei der Punkt $a + bi$ Nullpunkt, so geht die Gleichung über in*

e) $$p^n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n,$$

was ebenfalls leicht geometrisch zu deuten ist und für $n = 2$ eine bekannte Brennpunktseigenschaft der gleichseitigen Hyperbel giebt. Da sich aber jede Gerade in solcher Weise schreiben lässt, so lässt sich jede Hyperbel n^{ter} Ordnung durch eine Gleichung von der Form e) darstellen, wo die p vom Nullpunkte, die q von den Punkten $\sqrt[n]{a_1 + b_1 i}$ ausgehen.

8) Hierbei ist nun $a_1 + b_1 i$ der *Spiegelpunkt des Nullpunktes* gegen die Gerade. Deshalb sollen die entsprechenden Punkte $\sqrt[n]{a_1 + b_1 i}$ die *Brennpunkte der Hyperbel n^{ter} Ordnung* genannt werden. Die Geraden vom Centrum nach den Scheitelpunkten gehen demnach durch die Brennpunkte. Für $n = 2$ stimmt die Definition mit der gewöhnlichen Brennpunktdefinition überein, woraus sich interessante Analogien mit der gleichseitigen Hyperbel ergeben.

9) *Die Brennpunkte der Hyperbel n^{ter} Ordnung $r^n \cos n\varphi = a$ werden dargestellt durch $\sqrt[n]{2a}$.*

10) Eine gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten $\sqrt{a}$ werde der Transformation $s = \sqrt[n]{Z}$ unterworfen. Dadurch geht sie über in eine Hyperbel $2n^{ter}$ Ordnung mit den durch $\sqrt[2n]{a}$ dargestellten Brennpunkten, die abwechselnd den beiden Brennpunkten der ersten Curve entsprechen. Die Focalgleichung der ersteren ist aber

$$p - q = c,$$

wobei $c = \sqrt{a}(2 - \sqrt{2})$ ist. Folglich:

Die Hyperbel $2n^{ter}$ Ordnung mit den Brennpunkten $\sqrt[2n]{a}$ hat die Focaleigenschaft

f) $$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n - q_1 \cdot q_2 \cdots q_n = \sqrt{a}(2 - \sqrt{2}),$$

wobei die p und q Radii vectores sind, die von den Brennpunkten ausgehen und abwechselnd auf einander folgen.

11) Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, so bewegt sich das Spiegelbild des Nullpunktes auf einem Kreise um jenen Punkt und durch den Nullpunkt. Folglich:

Die Brennpunkte aller durch eine Punktgruppe $\sqrt[n]{a + bi}$ gehenden Hperbeln n^{ter} Ordnung liegen auf einer Lemniscate n^{ter} Ordnung, deren Arme sich im Nullpunkte treffen.

12) Schneiden sich zwei Gerade unter dem Winkel α, so gilt dasselbe von den durch den Nullpunkt gehenden Normalen. Folglich:

Schneiden sich zwei Hyperbeln n^{ter} Ordnung desselben Centrums einmal unter dem Winkel α, so schneiden sie sich im Ganzen n-mal unter demselben Winkel, und die Systeme ihrer Hauptaxen sind um den Winkel $\frac{\alpha}{n}$ gegen einander gedreht.

13) Dem System paralleler Geraden $X = a$ entspricht ein System von Hyperbeln n^{ter} Ordnung $r^n \cos n\varphi = a$, die einander nicht schneiden und deren Asymptoten zusammenfallen. Dasselbe gilt vom System $r^n \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{n}\right) = a$. Eine solche Curvengruppe soll als *„Schaar der Hyperbeln n^{ter} Ordnung“* bezeichnet werden, wogegen die durch Gleichung 7) und 9) des § 71 charakterisirte Gruppe *„Büschel der Hyperbeln n^{ter} Ordnung“* heissen soll. Fig. 28 und 29 stellen den Fall $n = 2$ dar.

14) Die gleichwinkligen isogonalen Trajectorien der Parallelenschaar, z. B. ihre Orthogonalen, sind wiederum eine Parallelenschaar. Folglich: Die gleichwinkligen isogonalen Trajectorien der Hyperbelschaar n^{ter} Ordnung bilden wiederum eine solche Schaar.

Ist die Gleichung der einen Gruppe $r^n \cos n\left(\varphi - \frac{\alpha}{n}\right) = a$, so hat z. B. die Orthogonalschaar die Gleichung $r^n \sin n\left(\varphi - \frac{\alpha}{n}\right) = a$.

15) Folgen die Parameter jeder der beiden letzten Schaaren in arithmetischer Reihe auf einander, so wird die Ebene in ein System rechtwinkliger Flächenräume eingetheilt, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. Ist die constante Differenz in beiden Reihen dieselbe, so entspricht dies der Eintheilung in „Quadrate", die Eckpunkte eines solchen Netzes liegen auf zwei Schaaren von Hyperbeln n^{ter} Ordnung.

16) Die Hyperbelschaar n^{ter} Ordnung

$$r^n \cos n\varphi = a$$

lässt sich auch schreiben

$$\text{g)} \qquad (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left[n \,.\, \arctan \frac{y}{x}\right] = a,$$

oder, wie man mit Hilfe der Polarcoordinaten leicht zeigen kann,

$$\text{h)} \qquad \frac{(x + yi)^n + (x - yi)^n}{2} = a.$$

Die linke Seite der Gleichung g) *ist also der reelle Theil der Function complexen Arguments* $f(x + yi) = (x + yi)^n$ *und muss als solcher der Differentialgleichung* $\Delta u = 0$ *genügen.* Es handelt sich demnach um ein Isothermensystem, welches, wie selbstverständlich war, durch die Abbildung $X + Yi = (x + yi)^n$ in das System der Geraden $X = a$ übergeht.

17) *Denkt man sich also in wärmeleitender Ebene zwei Hyperbeln n^{ter} Ordnung derselben Schaar auf constanten Temperaturen erhalten, so sind nach dem Eintreten des stationären Zustandes die Linien constanter Temperatur sämmtlich Hyperbeln n^{ter} Ordnung derselben Schaar.* Eine der ersten Curven kann man in den unendlichen Bereich verlegen, wodurch Nichts geändert wird. Geht dann noch die andere durch den Nullpunkt, so dass sie in zwei sich unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ schneidende Gerade übergeht, so ist das isothermische Problem für den Raum zwischen den Schenkeln dieses Winkels gelöst. Also auch hier bilden die Isothermen eine Hyperbelschaar n^{ter} Ordnung.

Statt zweier Hyperbeln der Schaar kann man auch solche des Büschels nehmen, wobei die übrigen Individuen des Büschels als Isothermen auftreten. Welche Linien in beiden Fällen die Strömungscurven der Wärme werden, ist leicht zu sagen.

Die entsprechenden hydrodynamischen und elektrodynamischen Deutungen bleiben dem Leser überlassen.

§ 74. Die Eigenschaften der Lemniscaten n^{ter} Ordnung und der aus ihnen hervorgehenden Isothermenschaaren.

1) Der Kreis $\varrho = c$ um den Punkt a der reellen Axe hat die Gleichung

$$R^2 - 2aR\cos\Phi + a^2 = c^2,$$

die entsprechende Lemniscate n^{ter} Ordnung also, deren Brennpunkte durch $\sqrt[n]{a}$, deren constantes Product durch c dargestellt ist, hat die Gleichung

$$r^{2n} - 2ar^n\cos n\varphi + a^2 = c^2.$$

2) Ist $c < a$, so liegt der Nullpunkt ausserhalb des Kreises, ist $c = a$, so liegt er auf dem Kreise, ist $c > a$, so liegt er innerhalb desselben. Entsprechend besteht die Lemniscate im ersten Falle aus n getrennten Ovalen, im zweiten Falle aus solchen, die sich im Nullpunkte unter Winkeln $\frac{\pi}{n}$ treffen, im dritten Falle aus einem einzigen, den Nullpunkt umschliessenden Linienzuge. Stets sind n Symmetrieaxen vorhanden, ebenso n Brennpunkte, dagegen $2n$ Scheitelpunkte.

3) Die Scheitelpunkte des Kreises liegen für $c < a$ beide auf der Linie $\Phi = 0$, bei der entsprechenden Lemniscate liegen sie paarweise auf den Brennpunkten, d. h. auf den Linien $\varphi = \frac{2\varkappa\pi}{n}$.

Für $c > a$ liegt der eine Scheitelpunkt des Kreises auf der Linie $\Phi = 0$, der andere auf der Linie $\Phi = 180^0$, bei der entsprechenden Lemniscate also liegen n Scheitelpunkte auf den Linien $\varphi = \frac{2\varkappa\pi}{n}$, die andern auf den Linien $\varphi = \frac{(2\varkappa+1)\pi}{n}$. Letzteres sind die Winkelhalbirenden der Brennpunktsradien.

4) Für $c < a$ findet man die beiden Werthe der Scheitelradien r, indem man in a) $\varphi = 0$ setzt, aus der Gleichung

$$r^n - a = \pm c,$$

für $c > a$ findet man die beiden Werthe aus den Gleichungen

$$r^n - a = +c, \quad r^n + a = c,$$

indem man einmal $\varphi = 0^0$, das andere Mal $\varphi = 180^0$ setzt und im ersten Falle berücksichtigt, dass r^n grösser ist, als a.

5) Setzt man nun nach Obigem statt a die n^{te} Potenz des Brennpunktsradius, etwa r_1^n, für c das constante Product $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$, so hat man für $c < a$

b) $$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = \pm (r^n - r_1^n),$$

für $c > a$

c) $$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = r^n \mp r_1^n.$$

In Worten: *Bei den aus getrennten Ovalen bestehenden Lemniscaten n^{ter} Ordnung ist das constante Product gleich der Differenz zwischen den n^{ten} Potenzen der Scheitel- und Brennpunktradien; bei den aus einem Zuge bestehenden ist das constante Product gleich derselben Differenz für die Brennpunktscheitelgruppe, aber gleich der Summe jener Potenzen für die andere Scheitelgruppe.*

Hierin liegt eine neue Fassung des *Cotesischen Theorems*, die weniger umständlich ist, als die in den Lehrbüchern gebräuchliche.

6) Schon oben war gezeigt, dass die confocalen Lemniscaten $p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = c$ und ihre Orthogonalen $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = \gamma$, sobald alle Radii vectores von der Punktgruppe $\sqrt[n]{a + bi}$ ausgehen, isothermische Curvensysteme bilden. Folgen die Parameter der Hyperbeln in arithmetischer Reihenfolge aufeinander, z. B. $0, \alpha, 2\alpha, \ldots$, die der Lemniscaten in geometrischer, z. B. $e^0, e^\beta, e^{2\beta}, \ldots$, so erhält man die Eintheilung der Ebene in rechtwinklige Flächenräume, die der Aehnlichkeit zustreben; ist aber $\alpha = \beta$, so ergiebt sich die quadratische Eintheilung. Für $n = 2$ erhält man das bekannte System der Interferenzlemniscaten und Polarisationshyperbeln optisch zweiaxiger Krystalle.

7) Die Gleichung der isogonalen Trajectorien concentrischer Kreise,

$$\varrho = c x^\vartheta,$$

bezogen auf das Centrum, stellt logarithmische Spiralen dar. Die isogonalen Trajectorien der Confocalschaar der Lemniscaten n^{ter} Ordnung und ebenso die des Hyperbelbüschels n^{ter} Ordnung haben demnach die Gleichung

$$\text{d)} \qquad p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = c \cdot x^{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n}.$$

Sie haben die Eigenschaft, *dass das Product der Radii vectores geometrisch zunimmt, wenn die Winkelsumme sich arithmetisch ändert.* Die Eckpunkte des besprochenen Netzes liegen auf solchen Curven. Ihre Eigenschaften lassen sich aus denen der logarithmischen Spiralen oder aus denen der Geraden ableiten. Logarithmirt man die Gleichung und setzt man für den Logarithmus des Productes den aus § 70, Gleichung 12) oder 14), folgenden Ausdruck, für die Winkelsumme den aus § 69, Gleichung 6) oder 9), folgenden in geeigneter Weise ein, so lässt sie sich auf die isothermische Form bringen, in der sie der Gleichung $\Delta U = 0$ genügt.

8) Das Kreisbüschel durch zwei Punkte $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ hat seine Mittelpunkte auf einer geraden Linie, die orthogonale Kreisschaar gleichfalls. Aus der entsprechenden Figur ergiebt sich Folgendes:

Durch die Punkte $\sqrt[n]{a+bi}$ und $\sqrt[n]{a_1+b_1 i}$ lässt sich ein Lemniscatenbüschel n^{ter} Ordnung legen, welches seine Brennpunkte stets auf einer Hyperbel n^{ter} Ordnung hat. Die Orthogonalschaar besteht aus Lemniscaten n^{ter} Ordnung, deren Brennpunkte gleichfalls auf einer Hyperbel n^{ter} Ordnung liegen. Jede der genannten Hyperbeln gehört zur andern Schaar. Beide Schaaren sind isothermische Curvensysteme.

9) Das genannte Kreisbüschel hat die Gleichung $\varphi - \chi = \gamma$, die orthogonale Kreisschaar die Gleichung $\frac{p}{q} = c$. Folglich:

Die Gleichungen

e) $$(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) - (\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n) = \gamma,$$

f) $$\frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = c,$$

wobei die Radii vectores von den Punktgruppen $\sqrt[n]{a+bi}$ und $\sqrt[n]{a_1+b_1 i}$ ausgehen, stellen ein Lemniscatenbüschel und die Orthogonalschaar von Lemniscaten n^{ter} Ordnung dar. In Worten:

Verbindet man die Ecken zweier concentrischer regelmässiger Polygone gleicher Seitenzahl, die beliebig gegen einander verdreht sind, mit einem beweglichen Punkte und bewegt sich derselbe so, dass das Product der einen Strahlengruppe, dividirt durch das der andern, einen constanten Werth giebt, so bewegt er sich auf einem Individuum der Lemniscatenschaar n^{ter} Ordnung. Bewegt er sich aber so, dass die Winkelsumme der einen Strahlengruppe, vermindert um die der andern, Constantes giebt, so beschreibt er ein Individuum des Lemniscatenbüschels n^{ter} Ordnung. Für den Fall $n = 3$ sind beide Curvengruppen durch Fig. 48 veranschaulicht. Der Figur wurde eine der von Herrn Guébhard überlassenen Platten zu Grunde gelegt, auf welcher die Spannungscurven auf elektrochemischem Wege fixirt waren. Man wird erkennen, dass man sich mit Hülfe der experimentellen Methode sehr leicht über den allgemeinen Charakter der fraglichen Curvensysteme orientiren kann. Bei einiger Uebung gelingt es schnell, die Stromlinien orthogonal einzuzeichnen und so eine Skizze des isothermischen Netzes zu erhalten.

10) Concentrirt sich die eine Punktgruppe in den Nullpunkt, ist also z. B. $a + bi = 0$, so lauten die Gleichungen:

g) $$n \cdot \varphi - (\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n) = \gamma,$$

h) $$\frac{p^n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = c.$$

Auch diese sind leicht in Worte zu kleiden.

11) Die isogonalen Trajectorien der Curven e) und f) haben die Gleichung

$$\text{i)} \qquad \frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = c \cdot \varkappa^{(\varphi_1 \cdot \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) - (\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n)}.$$

12) Die isogonalen Trajectorien der Curven g) und h) haben die Gleichung

$$\text{k)} \qquad \frac{p^n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = c \cdot \varkappa^{n\varphi - (\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n)}.$$

13) Transformation mittels reciproker Radii vectores vom Nullpunkte aus (isothermische Spiegelung gegen einen Kreis $r = c$ um den Nullpunkt) verwandelt jedes Kreisbüschel durch zwei Punkte wiederum in ein solches, die Orthogonalschaar des ersteren in die des zweiten. Folglich:

Dieselbe Transformation verwandelt ein Büschel von Lemniscaten n^{ter} Ordnung durch die Punktgruppen $\sqrt[n]{a + bi}$ und $\sqrt[n]{a_1 + b_1 i}$ wiederum in ein solches durch die reciproken Punkte

$$\frac{c^2}{\sqrt[n]{a + bi}} \text{ und } \frac{c^2}{\sqrt[n]{a_1 + b_1 i}},$$

die Orthogonalschaar der ersten Schaar geht dabei in die der zweiten über. Ist einer der Punkte, z. B. $a + bi$, der Nullpunkt, so erhält man durch diese Transformation ein Büschel von Hyperbeln n^{ter} Ordnung und die Orthogonalschaar confocaler Lemniscaten. Die isogonalen Trajectorien behalten gleichfalls ihren Charakter stets bei.

14) Ohne Schwierigkeit lässt sich, wie oben, auch hier stets die Function ermitteln, welche die genannten Curvenschaaren in ein System paralleler Geraden $X = c$ verwandelt. Daraus ergiebt sich die Gleichung jeder Schaar in rechtwinkligen Coordinaten so, dass ihre linke Seite der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt.

15) Unter den gelösten Wärmeaufgaben seien folgende genannt:

Werden in der Ebene zwei Individua der Schaar f) *auf constanten Temperaturen erhalten, so sind nach dem Eintreten des stationären Zustandes die dazwischen liegenden Curven derselben Schaar Isothermen.* Legt man den Punkt $a + bi$ ins Unendliche, so hat man die Lösung des Problems für confocale Lemniscaten n^{ter} Ordnung. Eine von denselben kann man, indem man das Product gleich Null setzt, in die n-Eckpunkte eines regulären Polygons verwandeln, die andere, indem man das Product gleich ∞ setzt, in den unendlichen Bereich verlegen. Auch dieser letzte Fall ist leicht zu deuten. Endlich ist noch der Fall gelöst, wo die Eckpunkte eines regulären Polygons auf constanter Temperatur gehalten werden, während die eines regulären Polygons gleicher Seitenzahl,

welches gegen das erste verdreht, aber mit ihm concentrisch ist, eine andere constante Temperatur beibehalten.

16) Das Entsprechende gilt von den Spannungscurven und Stromlinien, welche auftreten, wenn man die Elektricität durch punktförmige Elektroden, die in den Eckpunkten eines regelmässigen Polygons liegen, eintreten lässt, während sie durch ebensolche Elektroden abgeleitet wird, die ein reguläres, zum vorigen concentrisches, jedoch beliebig gegen dasselbe verdrehtes Polygon bilden. Einige Specialfälle sind in der citirten Dissertation des Herrn Hildebrandt und in den Abhandlungen des Herrn Dr. A. Guébhardt in den Comptes Rendus von 1881/82, im Electricien von 1881/82 und in den Bulletins de la Société de Physique von 1882 durch Zeichnungen dargestellt. Besonders das der letzten Arbeit beigegebene „tableau synoptique" enthält einige interessante Fälle.

§ 75. Andeutungen über weitere Consequenzen für die Geometrie der Ebene.

Wie aus der Geometrie der Geraden und des Kreises die lemniscatische Geometrie n^{ter} Ordnung abzuleiten ist, darüber vergleiche man Capitel VI und die Abhandlung im 21. Bande der Zeitschrift für Mathem. und Physik, wo stets an Stelle des Falles $n = 2$ der allgemeinere vorliegende zu setzen ist. Gleichen Strecken entsprechen correspondirende Hyperbelbogen, congruenten Gebilden correspondirende, ähnlichen Gebilden solche, die sich aus correspondirenden nach dem Theilungsprincip der lemniscatischen Geometrie ableiten lassen. Auch die neuere Geometrie findet ihre Uebertragung, so erhalten z. B. die Doppelverhältnisse

$$\frac{r-p}{r-q}\cdot\frac{s-q}{s-p} \text{ und } \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\gamma-\beta)}\cdot\frac{\sin(\delta-\beta)}{\sin(\delta-\alpha)}$$

die analogen Formen

$$\frac{r_1\cdot r_2\cdots r_n - p_1\cdot p_2\cdots p_n}{r_1\cdot r_2\cdots r_n - q_1\cdot q_2\cdots q_n}\cdot\frac{s_1\cdot s_2\cdots s_n - q_1\cdot q_2\cdots q_n}{s_1\cdot s_2\cdots s_n - p_1\cdot p_2\cdots p_n}$$

resp.

$$\frac{\sin[\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)]}{\sin[\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)]}$$
$$\times\frac{\sin[\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)]}{\sin[\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)]}.$$

Sämmtliche Sätze der Kreisverwandtschaft gehen in die entsprechenden der *lemniscatischen Verwandtschaft n^{ter} Ordnung* über, welche sich stets durch eine Function von der Form

$$z = \sqrt[n]{\frac{aZ^n + b}{cZ^n + d}}$$

vermitteln lässt, was bei der Kreisverwandtschaft durch $z = \frac{aZ + b}{cZ + d}$ geleistet wird. *Wie sich ferner jede Kreisverwandtschaft durch eine Transformation mittels reciproker Radii vectores gegen einen bestimmten Kreis ersetzen lässt, so reducirt sich die lemniscatische Verwandtschaft n^{ter} Ordnung auf die isothermische Spiegelung gegen eine bestimmte Lemniscate mit dem Nullpunkte als Centrum.*

Diese Verwandtschaft ist noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig, da zwei Ebenen auch so aufeinander bezogen werden können, dass jeder Lemniscate n^{ter} Ordnung der einen mit einem bestimmten Punkte als Centrum eine solche m^{ter} Ordnung der andern mit einem bestimmten Punkte als Centrum entspricht. Diese Beziehung wird vermittelt durch die Function

$$z = x + \sqrt[m]{\frac{aZ^n + b}{cZ^n + d}}.$$

Durch dieselbe wird z. B. auch das Innere einer Lemniscate n^{ter} Ordnung so auf das Innere oder Aeussere einer solchen Curve m^{ter} Ordnung conform abgebildet, dass die Brennpunkte der einen einem willkürlichen Punktsystem $\sqrt[n]{\alpha + \beta i}$ innerhalb, resp. ausserhalb der andern entsprechen.

Zahlreiche Abbildungsaufgaben lassen sich sofort synthetisch lösen. Z. B. wird die Aufgabe, den von zwei Lemniscaten n^{ter} Ordnung des Büschels und zweien der Orthogonalschaar begrenzten Flächenraum auf das Innere des Einheitskreises abzubilden, durch eine Function von folgender Form gelöst:*)

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{\varkappa} \cdot \operatorname{sn} \operatorname{am}\left[g + \lg \frac{az^n + b}{cz^n + d}\right]}{i + \sqrt{\varkappa} \cdot \operatorname{sn} \operatorname{am}\left[g + \lg \frac{az^n + b}{cz^n + d}\right]} \bmod \varkappa.$$

Nicht ohne Interesse sind die Uebertragungen der Steiner'schen Schliessungsprobleme, von denen eines auf eine Fläche führt, welche die Dupin'sche Cyclide als Specialfall enthält. —

Um auch die Abbildung $x + yi = (X + Yi)^{-\frac{1}{n}}$ für n ganz, positiv und reell zu erledigen, hat man nur die Bemerkung nöthig, dass die Transformation mittels reciproker Radii vectores Kreise

*) Hierzu ist das Capitel über die Abbildung mittels der elliptischen Function $Z = \operatorname{sn} \operatorname{am} s$ (mod $\varkappa$ positiv reell und < 1) zu vergleichen.

in Kreise, folglich jedes zum Nullpunkt gehörige Lemniscatensystem gleichfalls in ein solches verwandelt, und zwar geht das Büschel durch $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ über in das durch

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a+bi}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt[n]{a_1+b_1 i}}$$

gehende, wenn 1 der Radius des spiegelnden Kreises ist. Da die Kreisverwandtschaft vollständig durchführbar ist, so ist es auch die Verwandtschaft $x + yi = (X + Yi)^{-\frac{1}{n}}$ für ganzes, positives, reelles n.

Die Abbildung $z = Z^n$ für ganzes, positives und reelles n verwandelt Gerade und Kreise in Curven, deren Polargleichungen sich von denen der Lemniscaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung nur dadurch unterscheiden, dass $\frac{1}{n}$ an Stelle von n zu setzen ist. Sie sind von geringerem Interesse, da die Focaleigenschaften nicht erhalten bleiben und da sie im Allgemeinen mehrerer Riemann'scher Blätter bedürfen. Der Fall $n = 2$ verwandelt, wie schon gezeigt wurde, orthogonale Parallelenschaaren in orthogonale Schaaren von Parabeln mit dem Nullpunkte als Brennpunkt und gewisse gleichseitige Hyperbeln in Gerade, Kreise hingegen in Cardioidische Curvensysteme. Man kann statt von Lemniscaten $\frac{1}{n}^{\text{ter}}$ Ordnung von *„Cardioidischen Curven höherer Ordnung"* sprechen, die Eigenschaften derselben lassen sich aber, wie gesagt, weniger elegant entwickeln.

Mit Hülfe dieser Bemerkungen ist man im Stande, die Gleichung jeder Curve in lemniscatischen Coordinaten n^{ter} Ordnung mit beliebigen Brennpunkten $\sqrt[n]{a + bi}$ darzustellen. Beispielshalber soll dies mit der Geraden $X = a$ für $n = 2$ und die Brennpunkte $\sqrt{e}$ (e reell) durchgeführt werden.

Die Gleichung geht durch die Abbildung $z = Z^2$ über in die der Parabel $\sqrt{r} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} = a$ oder $r(1 + \cos\varphi) = 2a^2$, oder, wenn der Coordinatenanfang nach e verlegt wird, in

$$\varrho\cos\vartheta + e + \sqrt{\varrho^2 + 2e\varrho\cos\vartheta + e^2} = 2a^2.$$

Diese Gleichung geht durch die Abbildung $z = \sqrt{Z}$, *die auf den alten Nullpunkt zu beziehen ist*, wieder über in die Gleichung der Geraden, jedoch in den verlangten lemniscatischen Coordinaten, so dass die Form ist

$$p \cdot p_1 \cos(\vartheta + \vartheta_1) + e + \sqrt{p^2 \cdot p_1^2 + 2pp_1 e\cos(\vartheta + \vartheta_1) + e^2} = 2a^2.$$

Auch die Abbildung $z = \sqrt[\frac{n}{m}]{Z} = Z^{\frac{m}{n}}$ bietet nichts wesentlich Neues. Der Sector $\frac{360^0}{m}$ geht über in den Sector $\frac{360^0}{n}$, die n-fache Ebene wird in die m-fache verwandelt. Ist $\frac{n}{m} > 1$, so wird die Umgebung des Nullpunktes unendlichfach vergrössert, die des unendlichen Punktes unendlichfach verkleinert dargestellt. Für $\frac{n}{m} < 1$ ist's umgekehrt. Lemniscaten und Hyperbeln m^{ter} Ordnung mit den Brennpunkten $\sqrt[m]{a + bi}$ gehen in solche n^{ter} Ordnung mit den Brennpunkten $\sqrt[n]{a + bi}$ über, Kreise und Gerade hingegen in Lemniscaten und Hyperbeln $\frac{n}{m}^{ter}$ Ordnung, deren Polargleichungen von den früheren nur darin differiren, dass $\frac{n}{m}$ an Stelle von n zu setzen ist. Die n Brennpunkte liegen dabei in m Blättern. Die Focaleigenschaften fallen selbstverständlich bei den letzteren Curven fort. *Die Verwandtschaft lässt sich aber trotzdem vollständig durchführen, da die Relationen des Systems m^{ter} Ordnung in die des Systems n^{ter} Ordnung übergehen.*

Anders ist dies bei der Abbildung $z = \sqrt[n]{Z}$ mit irrationalem Exponenten, da in diesem Falle die Anzahl der Brennpunkte unendlich gross wird. Die Einfachheit der Uebertragung der Entfernung $r = c$ in die lemniscatische Entfernung $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = c$, ebenso die des Winkels $\vartheta = \gamma$ in die Relation $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots \vartheta_n = \gamma$ hört hier auf. Demnach stösst die Uebersetzung der Sätze der Geometrie des Masses in diesem Falle auf Schwierigkeiten des Ausdrucks, während zahlreiche Sätze der Geometrie der Lage leichter übertragen werden können.

Auf die Betrachtung imaginärer Wurzelexponenten soll hier verzichtet werden, da, wie schon in § 6 und 7 bemerkt wurde, die genauere Kenntniss der später zu behandelnden transscendenten Abbildung $Z = e^z$ dazu erforderlich ist.

Die vollständige Durchführbarkeit der Verwandtschaft

$$x + yi = \sqrt[n]{X + Yi}$$

ist also vorläufig nachgewiesen für jedes reelle und rationale n.

§ 76. Folgerungen für die Theorie der allgemeinen Kegelfläche.

Die Geometrie der allgemeinen Kegelfläche gründete sich bisher auf das Coordinatensystem der Geraden durch die Spitze und ihre Orthogonalschaar, dessen Abwickelung in die Ebene auf Gerade und concentrische Kreise führt. Von den übrigen Isothermenschaaren hatten nur noch die isogonalen Trajectorien jener Linien, die sich zu logarithmischen Spiralen abwickeln, Beachtung gefunden. So beschränkte sich auch die Abbildung der Ebene und Kugelfläche auf die Oberfläche des Kegels, welche J. H. Lambert in den „Anmerkungen und Zusätzen zur Entwerfung der Erd- und Himmelskarten" im 3. Theile der „Beiträge zum Gebrauche und der Anwendung der Mathematik" (1772) gab, auf den Specialfall, wo die orthogonalen Kreisschaaren der Kugel dem obengenannten System entsprechen.

Die allgemeine Abbildung von Ebene und Kugel auf den Kegel ist zwar nichts Neues, jedoch sind die geometrischen Consequenzen noch nicht gezogen und die der Abbildung entspringenden isothermischen Coordinatensysteme noch nicht behandelt worden.

Von einem gewissen Abschlusse der Geometrie einer Fläche kann offenbar nur dann die Rede sein, wenn die Grundpunkte der verschiedenen Coordinatensysteme von der Bedingung einer speciellen Lage befreit sind, wie dies z. B. für die Kugelfläche der Fall ist, auf der man den Schnittpunkten der Kreisbüschel oder zwei Brennpunkten eines Systems sphärischer Kegelschnitte beliebige Lagen geben kann. Für das dreiaxige Ellipsoid ist man (bei dem System der Krümmungslinien) auf die Nabelpunkte als Fundamentalpunkte des Coordinatensystems beschränkt, bei dem Kegel musste eben die Spitze zum Ausgangspunkte genommen werden.

Die kürzesten Linien auf der Kegelfläche, deren Abwickelung Gerade giebt, sind zum Coordinatensystem, besonders zum isothermischen, für den einschichtigen Kegel unbrauchbar, da sie sich selbst schneiden. Dasselbe gilt von den Curven, die sich in der Abwickelung als Kreise darstellen.

Aus den oben gegebenen Sätzen aber kann man die Verallgemeinerung der Geometrie der Kegelfläche leicht ableiten.

Der einschichtige Kegel lässt sich zum Sector $\frac{360^0}{n}$ abwickeln, wo n reell und > 1 ist. Auf diesen Sector kann man die ganze Ebene mittels der Abbildung $z = \sqrt[n]{Z}$ conform übertragen, wobei Gerade durch einen beliebigen Punkt $a + bi$ in Hyperbeln n^{ter} Ord-

nung durch den Sectorpunkt $\sqrt[n]{a+bi}$, Kreise um $a+bi$ in confocale Lemniscaten n^{ter} Ordnung um den Punkt $\sqrt[n]{a+bi}$ übergehen, während der Nullpunkt und der unendliche Punkt der Ebene dem Mittelpunkte und unendlichen Punkte des Sectors entsprechen. Man kann nun den Sector in einen Kegel verwandeln oder, um bei der Riemann'schen Vorstellungsweise zu bleiben, man kann die z-Ebene so zum Kegel mit dem Nullpunkte als Spitze zusammenrollen, dass jeder Sector eine Schicht des Kegels giebt. Dann fallen die Zeichnungen der einzelnen Sectoren, d. h. die verschiedenen Arme der Lemniscaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung genau auf einander, so dass geometrisch jede der Curven aus einem einzigen Zuge mit nur einem Brennpunkte besteht.

Beiläufig sei bemerkt, dass die scheinbare Wichtigkeit des Nullpunktes der z-Ebene, der vorher als Mittelpunkt des Polygons der Brennpunkte auftrat und die Isothermenschaaren zu specialisiren schien, hier vollständig aufgehoben ist. Die Spitze des Kegels behält nur die in der Natur desselben begründete Sonderstellung, dass er jeder die erstere durchschneidenden Curve dort einen Eckpunkt giebt, wodurch die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen mit der Originalebene gestört erscheint, und wobei zugleich das Vergrösserungsverhältniss gegen letztere unendlich gross wird.

Behält man nun für die in Rede stehenden Kegelcurven die Namen Hyperbeln und Lemniscaten n^{ter} Ordnung bei — wobei darauf zu achten ist, dass für den Fall $n = 2$ die gewöhnlichen ebenen Hyperbeln mit den vorliegenden nicht verwechselt werden dürfen —, *so lässt sich im Allgemeinen jeder Satz der ebenen Geometrie der Lage auf die Kegelfläche übertragen. Die Uebertragung von Maassrelationen mittels der Focaleigenschaften der Lemniscaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung ist aber auf den Fall zu beschränken, wo n eine ganze Zahl ist.*

In diesem Falle erhalten die Kegelcurven folgende Bedeutung: *Man verbinde einen beliebigen festen Punkt des Kegels mit einem beweglichen Punkte desselben durch n kürzeste Linien (von denen die eine die Spitze nicht umschlingt, während die anderen es ein, zwei, resp. mehrere Male thun). Soll dann der zweite Punkt sich so bewegen, dass das Product der kürzesten Linien constant bleibt, so ist sein geometrischer Ort eine Curve, die sich, in die Ebene abgewickelt, als Lemniscate n^{ter} Ordnung darstellt. Soll hingegen die Summe der Richtungswinkel der kürzesten Linien, gegen eine beliebige Tangente durch den ersten Punkt gemessen, constant bleiben, so entsteht eine Hyperbel n^{ter} Ordnung.*

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen Focalsätze übertragen.

Eine Vorstellung von den verschiedenen Coordinatensystemen des Kegels für jedes reelle n erhält man z. B., wenn man die zu Capitel VI gehörigen Figuren durch einen den Nullpunkt treffenden geradlinigen Schnitt halbirt und eine Hälfte zum Kegel zusammenrollt. In derselben Weise, wie dort, wird *jeder* Kegel durch solche Curvenschaaren in kleine „Quadrate" eingetheilt. Von Fig. 48 wäre der dritte, von Fig. 47 der vierte Theil zu nehmen.

Das allgemeinste der hier zu behandelnden Systeme ist *das Lemniscatenbüschel n^{ter} Ordnung durch zwei beliebige Punkte der Kegelfläche.* Man erhält dieses und die orthogonale Lemniscatenschaar, indem man z. B. *den Globus mit dem Netze der geographischen Linien so auf dem Kegel conform und eindeutig abbildet, dass die Pole zwei beliebigen Punkten der Kegelfläche entsprechen.*

Ist der eine dieser Punkte der unendliche, so ensteht das System der Hyperbeln n^{ter} Ordnung durch einen beliebigen Punkt der Kegelfläche und die Orthogonalschaar confocaler Lemniscaten. Fällt der Punkt hingegen in die Spitze, so erhält man das Büschel der Schleifenlemniscaten.

Liegt ein Punkt in der Spitze, einer im Unendlichen, so entsteht das System der Geraden durch die Spitze und die Orthogonalschaar, deren Abwickelung auf Kreise führt. Dieser Fall giebt die gewöhnliche Uebertragung.

Eine besondere Betrachtung verdient ein anderer Fall, wo beide Büschelpunkte im Unendlichen liegen und wobei man die beiden Orthogonalschaaren von Hyperbeln n^{ter} Ordnung erhält. *Durch diese Abbildung erhält man gleichzeitig die Uebertragung der Mercator-Karte auf den Kegel.* Die Kugelfläche wird aber hier *unendlich* oft und zwar *periodisch* auf der Kegelfläche abgebildet, so dass es sich um eine andere Function handelt. Diese Function, welche die stereographische Projection des Ptolemäus mit dem Nullpunkte als Pol unendlich oft auf die Ebene, dann auf den Sector $\frac{360}{n}$ derselben und den entsprechenden Kegel überträgt, ist

$$z = \sqrt[n]{\lg Z}.$$

In der Nähe der Spitze erscheint das Ganze sehr verschoben, mit der Entfernung von der Spitze nähert sich aber die Darstellung mehr und mehr der des *Mercator*. Man vergl. hier das Capitel über die logarithmische Abbildung. In diesem Falle gehen übrigens die Loxodromen der Kugel in „Hyperbeln n^{ter} Ordnung" auf der Kegelfläche über.

Dass auch die Schaaren der Lemniscaten $2n^{ter}$, $3n^{ter}$ Ordnung etc. auf der Kegelfläche $\frac{360^0}{n}$ als Isothermen zu betrachten sind, ist selbstverständlich.

Unter gewissen physikalischen Voraussetzungen entspricht jedem isothermischen Probleme, welches für die Ebene gelöst ist, ein solches auf dem Kegel. Es handelt sich dabei z. B. um einen stationären Wärmezustand, dem eine solche Fläche unter gegebenen Bedingungen zustrebt. Vorausgesetzt wird, dass die Wärme sich nur auf der Fläche selbst, nicht aber mittels Strahlung durch den Hohlraum des Kegels verbreitet.

Besonders instructiv ist folgendes Beispiel: Ein beliebiger Punkt der Kegelfläche $\frac{360^0}{n}$ werde auf constanter Temperatur gehalten, der unendliche Bereich (oder statt dessen eine lemniscatische Curve n^{ter} Ordnung, die den Punkt in oben besprochener Weise zum Brennpunkt hat) auf einer andern constanten Temperatur. Welches sind Isothermen? Nach Obigem sind die isothermischen Curven die zugehörigen Lemniscaten n^{ter} Ordnung. Die Curven, deren Abwickelung auf Kreise führt, spielen hierbei durchaus keine Rolle, da die Erwärmung rings um den Kegel wandert, was besonders in der Nähe der Spitze von Einfluss ist. Je kleiner die Ovale und je weiter sie von der Spitze entfernt sind, um so mehr ähneln sie Kreisen, sie degeneriren mit der Annäherung an die Spitze; ist dieselbe aber überschritten, so tritt die Annäherung an die Kreisgestalt wieder in wachsendem Grade ein.

Wird ein Kegel längs der beiden Geraden eines Hauptschnittes auf constanter Temperatur erhalten, und geschieht dasselbe mit dem unendlichen Bereiche, so erledigt sich das Problem durch die Hyperbelschaar n^{ter} Ordnung. Weitere Beispiele lege der Leser sich selbst zurecht.

Das Entsprechende gilt von den Problemen der stationären elektrischen Strömung. Vielleicht lässt sich die schöne experimentelle Methode des Herrn Guébhard auch auf die Kegelflächen ausdehnen, wodurch die Theorie der stationären Strömung auf krummen Oberflächen eine praktische Bestätigung finden würde.

Sollen zwei Kegel von $\frac{360^0}{m}$ und $\frac{360^0}{n}$ eindeutig und conform so auf einander abgebildet werden, dass drei willkürlichen Punkten des einen drei willkürliche des andern entsprechen und der Innenraum der durch die drei ersten gelegten Lemniscate m^{ter} Ordnung auf das Innere oder Aeussere der durch die drei anderen gehenden Lemnis-

caten n^{ter} Ordnung übertragen wird (was von der Art des Umgangs der drei Punkte abhängt), so geschieht dies durch die Function

$$z = \sqrt[n]{\frac{aZ^m + b}{cZ^m + d}}.$$

Wie also die Kreisverwandtschaft alle eindeutigen conformen Uebertragungen von Kugel auf Kugel oder von Ebene auf Ebene vermittelt, so entspricht die lemniscatische Transformation

$$z = \sqrt[n]{\frac{aZ^m + b}{cZ^m_{\alpha\alpha} + d}}$$

allen eindeutigen Verwandtschaften der Kegelflächen verschiedenen Sectorenwinkels unter einander.

Die lemniscatische Verwandtschaft ist aber in demselben Masse umfassender, als die Kreisverwandtschaft, wie die genannte Function allgemeiner ist, als $z = \frac{aZ + b}{cZ + d}$.

Wie die Sätze der Kreisverwandtschaft auf die eindeutige Verwandtschaft der Kegelfläche übertragen werden, ergiebt sich aus Obigem. —

Die gesammte ebene Geometrie ist schliesslich nur ein specieller Fall der behandelten Geometrie der Kegelfläche.

§ 77. Die Kinematik des lemniscatisch-veränderlichen Systems n^{ter} Ordnung und der Kegelfläche.

1) Die Bewegung eines Punktes der Z-Ebene auf beliebiger Curve mit der constanten Geschwindigkeit $V = c$ verwandelt sich durch die Abbildung $z = \sqrt[n]{Z}$ in die der entsprechenden Punkte der z-Ebene resp. der Kegelfläche auf den entsprechenden Curvenarmen, deren Geschwindigkeit ist

$$v = \frac{c}{n} R^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{c}{n} r^{1-n}.$$

Hier ist $\frac{1}{n} R^{n-1}$ der absolute Betrag des Differentialquotienten der abbildenden Function, r hingegen die Entfernung des abhängigen Punktes vom Nullpunkte, resp. der Kegelspitze. Von dieser allein ist die Geschwindigkeit abhängig.

Für $n > 1$ wächst sie mit der Annäherung an den Nullpunkt und ist in letzterem unendlich gross; nach dem unendlichen Bereiche hin nähert sie sich hingegen der Null. Für $n > 1$ ist es umgekehrt.

Soll die Geschwindigkeit auch hier constant sein, so muss r

constant sein, beide sich entsprechende Bewegungen müssen also in einem Kreise um den Nullpunkt erfolgen.

2) Ist die Bewegung des ersten Punktes gleichmässig beschleunigt, also $V = gt$, so ist die des abhängigen Punktes

$$v = \frac{gt}{n} R^{\frac{1}{n}-1} = \frac{gt}{n} r^{1-n},$$

also von zwei Variabeln abhängig. Soll auch die des letzteren Punktes gleichförmig beschleunigt sein, so muss wiederum Kreisbewegung um Null stattfinden.

3) Multiplicirt man die allgemeine Geschwindigkeit $V = \frac{ds}{dt}$ mit $\frac{1}{n} R^{\frac{1}{n}-1}$ resp. $\frac{1}{n} r^{1-n}$, so erhält man ebenfalls die des abhängigen Punktes.

4) Der Richtungsunterschied beider Bewegungen ergiebt sich, wie oben besprochen, aus der Abweichung des Differentialquotienten der abbildenden Function als $(1 - n)\varphi$.

5) Bewegt sich der erste Punkt auf Gerader oder Kreis, so wandert der zweite nach Massgabe des oben Gesagten auf Hyperbel oder Lemniscate n^{ter} Ordnung, und zwar bei constanter Geschwindigkeit der ersteren so, dass in gleichen Zeiträumen correspondirende Bogen zurückgelegt werden.

6) Ist z. B. die Bewegung des ersten Punktes eine geradlinige mit constanter Geschwindigkeit, so ändert sich seine Entfernung ϱ von einem Punkte $a + bi$ der Geraden gleichmässig. Für ganzes positives n folgt daraus, dass bei der entsprechenden Hyperbelbewegung sich das Product $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$, bezogen auf $\sqrt[n]{a + bi}$, gleichmässig ändert.

7) Geschieht die Bewegung des ersten Punktes auf einem Kreise mit constanter Geschwindigkeit, so ist die Abweichung ϑ des Kreisradius einer gleichmässigen Aenderung unterworfen. Bei der entsprechenden Lemniscatenbewegung nimmt die Summe

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n$$

gleichmässig zu oder ab, sobald nur n ganz, positiv und reell ist. Aehnliches gilt von der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

8) Das Gesagte reicht hin, die Kinematik des Punktes in die lemniscatische Kinematik n^{ter} Ordnung und in die der Kegelfläche zu übertragen.

9) Das starre ebene Gebilde geht durch die Transformation $z = \sqrt[n]{Z}$ in das lemniscatisch-veränderliche n^{ter} Ordnung über. Während in ersterem alle geradlinigen Entfernungen constant bleiben,

ist dies im andern nicht der Fall, sondern Hyperbeln n^{ter} Ordnung verbleiben Curven dieses Charakters, erleiden aber Gestaltsveränderungen, bei denen jedoch die oben betrachteten Maasbeziehungen und ebenso alle Winkel erhalten bleiben.

10) Wird die gesammte Z-Ebene geradlinig und parallel zu sich selbst verschoben, so wandern entsprechend in der z-Ebene oder der Kegelfläche $\frac{360^0}{n}$ alle Punkte auf Hyperbeln n^{ter} Ordnung, und wie dort eine gewisse Parallelenschaar in sich selbst gleitet, so geschieht dies hier mit einer bestimmten Hyperbelschaar. Jede der anderen Hyperbeln degenerirt beim Passiren des Nullpunktes in n Gerade.

11) Dreht sich die Z-Ebene um einen ihrer Punkte, so bewegen sich die Punkte der abhängigen Fläche auf confocalen Lemniscaten n^{ter} Ordnung. Alle Curven dieser Art, ebenso die Hyperbeln n^{ter} Ordnung, behalten ihren Charakter bei, eine bestimmte Schaar confocaler Lemniscaten n^{ter} Ordnung gleitet in sich selbst. Für $n = 2$ wird dadurch die bekannte optische Erscheinung an Salpeterkrystallen dargestellt.

12) Eine gewisse Bewegung in der Z-Ebene wird durch die Wellenkreise versinnlicht, die auf der Wasserfläche durch einen Steinwurf entstehen. Die entsprechende Bewegung in der z-Ebene ist derartig, dass jeder Punkt sich auf einer Hyperbel n^{ter} Ordnung bewegt und dass die orthogonalen confocalen Lemniscaten gesetzmässig anschwellen.

13) Combinirt man in der Z-Ebene constante Rotation und Anschwellen der Kreise nach dem Gesetz der geometrischen Reihe, so bewegt sich jeder Punkt auf logarithmischer Spirale, während in der z-Ebene isogonale Trajectorien von der Gleichung

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n = c\, x^{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n}$$

zurückgelegt werden, die gleichzeitig in sich selbst gleitende Curven sind.

Auch der Bewegungszustand des kreisverwandt-veränderlichen Systems ist leicht zu übertragen. Im Uebrigen vergleiche man die Andeutungen, welche im Cap. VI und in § 7 der Abhandlung im 21. Bande der Zeitschrift für Mathem. und Physik gegeben sind.

§ 78. Litteratur.

Verfasser behandelte die Abbildung $z = \sqrt[n]{Z}$ und die regulären Lemniscaten n^{ter} Ordnung im 83. Bande des *Crelle'schen Journals*. Durch ein Referat im *Jahrbuch über die Fortschritte in der Mathe-*

matik (1877) wurde er aufmerksam gemacht auf eine Arbeit von Darboux, „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires", *Mém. de Bordeaux* VIII und IX, über welche dasselbe Jahrbuch früher berichtet hat. Leider ist diese Schrift vergriffen, und nur der 8. Band der Mém. de Bordeaux dem Verfasser zugänglich geworden, der das hierher Gehörige nicht enthält. Aus dem Referate aber konnte entnommen werden, dass die regulären Lemniscaten n^{ter} Ordnung ein Specialfall der von Darboux behandelten Curven sind, auf die das nächste Capitel näher eingeht.

Im 26. Bande der *Zeitschrift für Mathem. und Physik* gab der Verfasser die vorstehende eingehendere Behandlung. Während des Druckes dieses Werkes fand er eine interessante Notiz von Barnaba Tortolini „Ueber einige algebraische Curven, von denen die Lemniscate ein specieller Fall ist" im 6. Bande der Zeitschrift für Mathem. und Physik S. 209 über Curven von der Form $r^n = a_n \cos(nu)$. Der Aufsatz ist entnommen den *Annali di Matematica pura ed applicata*, Nr. 3, S. 178. Er citirt Noten von Serret im 7. und 8. Bande des Journals von Liouville, in denen unter Anderem gezeigt wird, dass für gerades n die Parameter dieser Curven durch Euler'sche Integrale zweiter Gattung oder durch die Function Γ von Legendre ausgedrückt werden können. Auch analytische Untersuchungen von *Fagnano* in dessen *Producioni matematiche*, Band 2, schediasma 1 u. S. 375 werden erwähnt.

Eine imaginäre Schreibweise der Curven wird auf S. 212 der Tortolini'schen Notiz gegeben.

Das vorliegende Capitel gestattet demnach in analytischer Richtung einen weiteren Ausbau.

Physikalisches findet man in der bereits citirten Dissertation von Hildebrand und in den Abhandlungen von Guébhard in den *Comptes Rendus* 1881/82, im *Électricien* von 1881/82 und in den *Bulletins de la Société de Physique* von 1882, die sämmtlich zahlreiche Litteraturnachweise enthalten. Die Arbeit von Haton de la Goupillière ist bereits im Texte genannt.

Im 12. Bande der Zeitschrift für Mathem. und Physik giebt Lommel, wie nachträglich bemerkt sein mag, einen Abriss der Theorie der lemniscatischen Coordinaten 2ter Ordnung, der jedoch nicht auf der Methode des Imaginären beruht, also weniger hierher gehört.

Zehntes Capitel.

Die Abbildung mittels ganzer rationaler Functionen und ihrer Umkehrungen.

§ 79. Allgemeines über die zugehörigen Riemann'schen Flächen.

Die ganze rationale Function n^{ten} Grades ist von der Form

1) $$Z = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = f(z).$$

Hier ist der Factor des ersten Gliedes gleich der Einheit gesetzt, was der Allgemeinheit der Untersuchung nicht schadet, da die Multiplication der Function mit einem Factor a_0 nur Vergrösserung und Drehung bedeutet. Die Factoren a werden als complex angenommen.

Die Exponenten sind ganze Zahlen, also kann der *eine* Werth von Z, der zu einem gegebenen z gehört, mit elementaren Hilfsmitteln nach § 4 construirt werden. Man darf demnach die z-Ebene als *einschichtig* annehmen, was bei jeder *einwerthigen* Function gestattet ist.

Dagegen ist es im Allgemeinen nicht möglich, die umgekehrte Function

2) $$z = \varphi(Z)$$

explicite darzustellen, und ebensowenig lässt sich zu jedem Werthe von Z das zugehörige z elementar construiren,

Setzt man den Fundamentalsatz der Algebra und seine Folgerungen als bekannt voraus, so weiss man, dass zu jedem Werthe von Z im Allgemeinen n Werthe von z gehören. Um Eindeutigkeit zu erzielen, muss man sich also nach Riemann die Z-Ebene als aus n Blättern bestehend denken.

Um den Zusammenhang derselben zu untersuchen, betrachte man den Differentialquotienten

3) $$Z' = nz^{n-1} + a_1(n-1)z^{n-2} + \cdots + a_{n-1},$$

der für $n-1$ Werthe verschwindet. Da der 2te Differentialquotient im Allgemeinen nicht an denselben Stellen verschwindet, hat man im Allgemeinen (nach § 40) mit $n-1$ Windungspunkten 1ter Ordnung im Endlichen zu thun, von denen im speciellen Falle 2 zu einem Windungspunkte 2ter Ordnung, m zu einem solchen m^{ter} Ordnung zusammenfallen können, was eben mit dem Verschwinden der m ersten Differentialquotienten an derselben Stelle zusammenhängen würde.

Im Allgemeinen hängen also die n-Blätter zu je zweien in $(n-1)$ endlichen Punkten zusammen.

Das Verhalten des unendlichen Punktes muss besonders untersucht werden. Die unendlichen Bereiche beider Ebenen entsprechen sich gegenseitig. Z' ist für $z = \infty$ gleichfalls unendlich gross, so dass eine Singularität stattfinden muss. Welcher Art ist dieselbe? Man kann z in Gleichung 1) so gross annehmen, dass das erste Glied über alle anderen dominirt, so dass mit zunehmendem z der Charakter der Function sich dem der Function

$$Z = z^n$$

mehr und mehr nähert. (Man erkennt dies bei der Schreibweise $Z = z^n \left[1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right]$.) Daraus folgt, dass der unendliche Punkt ebenso, wie bei letzterer, ein Windungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. In ihm hängen also alle n-Blätter zusammen, und in ihm müssen sich die $n-1$ Verzweigungsschnitte treffen, die von den $n-1$ endlichen Windungspunkten ausgehen. Eine andere Anordnung ist nicht denkbar. In Fig. 49 ist dieselbe für den Fall der Function 3ten Grades dargestellt. Man kann aus der Zeichnung selbst Weiteres ablesen.

Die Wichtigkeit des Gegenstandes veranlasst uns aber, von der Kenntniss des Fundamentalsatzes abzusehen und die Riemann'sche Fläche successiv aufzubauen, indem wir von der Function $z - a$ ausgehen, dieselbe mit z multipliciren, dann zu $z(z-a)$ ein Absolutglied hinzufügen, wodurch eine Function von der Form $z^2 - a_1 z + a_2$ entsteht. Diese wird wieder mit z multiplicirt, ein neues Absolutglied beigefügt und so allmählich die Function n^{ten} Grades gebildet und stets der Schluss von n auf $n+1$ angewendet. Dadurch wird das obige Resultat in voller Klarheit bewiesen und gleichzeitig ein geometrischer Kommentar zu dem Fundamentalsatze der Algebra gegeben. Einige Weitläufigkeit ist dabei unvermeidlich.

§. 80. Successiver Aufbau der Riemann'schen Fläche.

1) *Die Function* $z(z-a)$.

Wir betrachten drei Ebenen, die des Arguments

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

die der Function

$$z - a = \zeta = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

die der Function

$$z(z-a) = z\cdot\zeta = Z = R(\cos\Phi + i\sin\Phi).$$

Sämmtliche sind conform aufeinander bezogen, und zwar stehen die beiden ersten in der Verwandtschaft der Congruenz, beide zur dritten in lemniscatischer Verwandtschaft. In Fig. 50 α, β, γ sind sie schematisch dargestellt. Um den Punkt Z_1 der dritten Ebene zu finden, der zu einem gegebenen Punkte z_1 der ersten gehört, hat man die zusammengehörigen complexen Strecken z_1 und $\varphi_1 = z_1 - a$ der beiden ersten Ebenen zu multipliciren. Es ist also

$$R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = r \cdot \varrho\,[\cos(\varphi + \vartheta) + i\sin(\varphi + \vartheta)].$$

Endlichen Punkten der ersten Ebene entsprechen endliche der zweiten, folglich auch endliche der dritten. Die unendlichen Bereiche der drei Ebenen entsprechen gleichfalls einander.

In Fig. 50 α sei A der Nullpunkt, B der Punkt $z = a$. Beiden entsprechen in der ζ-Ebene die gleichnamigen Punkte, nur ist jetzt B der Nullpunkt, A der Punkt $-a$. In der Z-Ebene fallen die beiden entsprechenden Punkte im Nullpunkte zusammen, da $r \cdot \varrho$ sowohl für $r = 0$, als auch für $\varrho = 0$ verschwindet.

Ein grösserer Kreis um A in z, der B umschliesst, entspricht einem solchen in ζ, der um A geht und B umschliesst. Wanderung von 0 bis 2π auf dem ersteren geht über in einen Umgang auf dem zweiten, zu dem von dem excentrisch liegenden Nullpunkte B aus gerechnet die ungleichmässig wachsenden Winkel von β bis $\beta + 2\pi$ gehören, wo β leicht aus a und r zu bestimmen ist. Durch Multiplication beider Winkelgrössen folgt, dass der zugehörige Weg in der Z-Ebene von $0 + \beta$ bis $2\pi + (\beta + 2\pi) = \beta + 4\pi$ geht, d. h. es wird ein *doppelter Umgang* gemacht; der Weg umgiebt also einen Windungspunkt 1ter Ordnung. Nach § 57 ist dieser Weg ein cardioidischer und zwar ein mit einer Schleife versehener.

Da der Differentialquotient von $z(z - a)$, also der Ausdruck $2z - a$ nur für *einen* Werth von z verschwindet, nämlich für $z = \frac{a}{2}$, so folgt, dass jener Windungspunkt an der Stelle

$$Z = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - a\right) = -\frac{a^2}{4}$$

liegt, also nicht etwa, wie es scheinen möchte, im Nullpunkte. Die Strecke AB in der z- und ζ-Ebene wird also durch den dem Verzweigunspunkte entsprechenden Punkt halbirt. In der Z-Ebene ist nun von V aus der Verzweigungsschnitt beliebig — nur sich selbst nicht schneidend — nach dem unendlichen Bereiche zu ziehen. Längs desselben gehen beide Blätter in einander über. Im Verzweigungspunkte und im unendlichen Punkte hängen sie vollständig zusammen.

Um die Richtigkeit dieser Anordnung zu prüfen, betrachte man einen kleinen Kreis der z-Ebene um den Punkt A, der V und B ausschliesst. Ihm entspricht ein kleiner Kreis um A in ζ, der gleichfalls V und B, den Nullpunkt, ausschliesst. Wandert der Punkt der z-Ebene auf dem ersten Kreise von 0 bis 2π, so geschieht ein Umgang um A in der zweiten Ebene, was aber von B aus betrachtet nicht einen Umgang, sondern nur eine unter 180^0 bleibende Schwankung der Abweichung φ zwischen zwei Winkeln β und $\beta + \gamma$ (zwischen den Tangentenlagen) giebt. Die Addition der entsprechenden Winkel giebt nun in der Z-Ebene nicht mehr einen doppelten Umgang um den Nullpunkt, sondern nur einen einfachen auf einer cardioidischen Curve *ohne* Schleife. Der Grenzkreis, d. h. der durch V gehende, giebt die Cardioide mit Rückkehrpunkten.

Ganz ebenso verhält es sich mit kleinen Kreisen um B, denn A und B sind durchaus gleichberechtigt, da $z \cdot \zeta = \zeta \cdot z$ ist.

Der Weg in der z-Ebene liess r constant, während φ variirte. Jetzt lasse man φ constant und variire r von 0 bis ∞. Dann variirt in der ζ-Ebene ϱ von $-a$ bis ∞. Der entsprechende Weg in der Z-Ebene ist aber ein parabolischer mit V als Brennpunkt, und zwar, wenn V passirt werden sollte, mit V als Rückkehrpunkt, so dass in diesem Specialfalle der Nullpunkt zweimal passirt wird, wobei übrigens die Parabel zur Geraden degenerirt.

Wesentlich ist, dass $r \cdot \varrho$ alle Werthe von 0 bis unendlich mindestens einmal annimmt. Das Strahlenbüschel durch A in der z-Ebene, welches die letztere stetig erfüllt, geht also über in ein parabolisches Büschel der Z-Ebene, welches beide Schichten derselben stetig erfüllt. — In Figur 50γ ist eine beliebige Gerade durch V als Verzweigungsschnitt angenommen, dem in den beiden andern Ebenen unbegrenzte Gerade entsprechen. Der schattirte Theil der letzteren Ebene mag dem oberen, der Rest dem unteren Theile der Z-Ebene entsprechen.

2) *Die Function* $Z = z^2 - a_1 z + a_2$.

Durch die Zufügung von a_2 tritt nur eine Verschiebung der früheren Z-Ebene ein. Sie bleibt also zweiblättrig im vorigen Sinne. Z' wird hier Null für $z = -\frac{a_1}{2}$, so dass $Z = a_2 - \frac{a_1^2}{4}$ den einzigen endlichen Windungspunkt darstellt, in dem die Verdoppelung der Winkel vor sich geht.

3) *Die Function* $z \cdot \zeta = z(z^2 - a_1 z + a_2)$.

Wiederum sind die drei Ebenen z, ζ und Z (Fig. 51 α, β, γ) zu betrachten, nur ist die zweite derselben jetzt zweiblättrig mit

$V = a_2 - \frac{a_1^2}{4}$ als Windungspunkt im Endlichen, mit $A = a_2$ als dem dem Nullpunkte von z entsprechenden Punkte, während ihrem Nullpunkte B in z die beiden Punkte

$$B_1 \text{ resp. } B_2 = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

entsprechen.

Zunächst werde in z ein Kreis um den Nullpunkt betrachtet, der B_1 und B_2, also auch das zwischen ihnen liegende V umschliesst. Ihm entspricht in ζ eine Curve mit doppeltem Umlauf (cardioidische Curve mit Schleife), so dass dem Umgange von 0 bis 2π in z hier ein Umgang der Abweichung ϑ von irgend einem Werthe β bis $\beta + 4\pi$ entspricht. Durch Multiplication der entsprechenden Strecken beider Ebenen, also durch Addition der Abweichungen, erhält man in Z einen Umgang von $0 + \beta$ bis $2\pi + (\beta + 4\pi) = \beta + 6\pi$, also einen *dreifachen* Umgang. Ausserhalb einer gewissen Grenzcurve ist also die Z-Ebene dreiblättrig. Aus $Z' = 3z^2 - 2a_1 z + a_2 = 0$ ergeben sich als Verzweigungspunkte im Endlichen diejenigen, welche den beiden Punkten

$$V_1 \text{ resp. } V_2 = \frac{a_1}{3} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{9} - \frac{a_2}{3}}$$

der z-Ebene entsprechen. Zu diesen gehören in der ζ-Ebene die beiden Punkte

$$\mp \sqrt{\frac{a_1^2}{9} - \frac{a_2}{3}} \left[\frac{a_1}{3} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{9} - \frac{a_2}{3}}\right],$$

wo die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammen gehören, so dass endlich die beiden Verzweigungspunkte der Z-Ebene die innerhalb der geschlossenen Curve liegen, durch

$$V_1 \text{ resp. } V_2 = \mp \sqrt{\frac{a_1^2}{9} - \frac{a_2}{3}} \left[\frac{a_1}{3} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{9} - \frac{a_2}{3}}\right]^2$$

dargestellt werden. Jeder derselben ist nach § 40 ein Windungspunkt 1ter Ordnung, da der zweite Differentialquotient $Z'' = 6z - 2a_1$ nicht an derselben Stelle verschwindet. Da Discontinuitäten nirgends vorkommen und die Conformität nur in diesen beiden endlichen Punkten gestört ist, so muss angenommen werden, dass die Z-Ebene *überall* dreiblättrig ist, und dass Zusammenhang zwischen je zwei Blättern im endlichen Bereiche der Z-Ebene nur in den Punkten V_1 und V_2 stattfinden kann. Von dort aus sind die Verzweigungsschnitte nach dem unendlichen Punkte zu legen, wo alle drei Blätter zusammenhängen, wo also ein Windungspunkt 2ter Ordnung zu denken ist.

Fig. 49 stellt diese Anordnung der Z-Ebene möglichst anschaulich dar und enthebt uns weiterer Erläuterungen.

Die Richtigkeit unserer Auffassung kann auf mannichfache Weise geprüft werden. Man wandere z. B. auf sehr kleinem Kreise, der B_1, V und B_2 ausschliesst, um den Punkt A_1 der z-Ebene (Fig. 51). Dies giebt in der z-Ebene eine angenäherte Kreiswanderung um den Punkt A_1 des einen Blattes, welche, wenn der beliebig verlaufende Schnitt nicht gerade durch A_1 geführt wird, nur *ein* Blatt der Ebene in Anspruch nimmt. Da dieser kleine Kreis den Nullpunkt nicht umschliesst oder erreicht, so macht die Abweichung ϑ des Arguments ζ während jener Wanderung nur eine Schwankung innerhalb des Winkels zwischen den beiden Tangenten, die sich vom Nullpunkte aus an den kleinen Kreis legen lassen. Die Multiplication beider Argumente giebt also in der Z-Ebene einen Weg, der nur *einen* Umgang um den Punkt A_1 macht, also nur *ein* Blatt in Anspruch nimmt.

Aehnlich ist es mit kleinen Kreisen um B_1 oder B_2 in der z-Ebene, welche die übrigen genannten Punkte ausschliessen und den Verzweigungsschnitt nicht treffen.

Man betrachte dagegen eine einfach um A_1 und B_1 laufende geschlossene Curve der z-Ebene, welche B_2 und V ausschliesst und den „Schnitt“ nicht überschreitet. Dies giebt eine *ein*blättrige Curve in ζ, welche A_1 und B_1 umschliesst. Das Multipliciren der entsprechenden Punkte giebt jetzt, da um den Nullpunkt der ζ-Ebene gleichfalls ein Umgang gemacht wird, in der Z-Ebene einen Doppelumlauf um A_1 und B_1, bei dem also nur *einer* der Punkte V_1 und V_2 eingeschlossen wird.

[Vor einem naheliegenden Irrthume, der bei der gebräuchlichen Knappheit mathematischer Darstellungen begangen werden könnte, mag ausdrücklich gewarnt werden. Man könnte meinen, dass bei der Multiplication der beiden Ebenen der Verzweigungspunkt V der ζ-Ebene als solcher erhalten bleibe und nur ein neuer dazu trete. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, *so dass der entsprechende Punkt V der Z-Ebene nichts mit V_1 und V_2 zu thun hat.* Um dies zu prüfen, stelle man Z als Function von ζ dar. Dann ist

$$Z = \xi\left[\frac{a_1}{2} + \sqrt{\zeta - \left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right)}\right],$$

also

$$Z' = \frac{a_1}{2} + \frac{3\zeta - 2\left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right)}{2\sqrt{\zeta - \left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right)}}.$$

Wo dieser Ausdruck verschwindet, da liegen die Punkte V_1 und V_2 der ζ-Ebene. Wo er unendlich wird, da hat die ζ-Ebene einen Verzweigungspunkt V im Gegensatz zur Z-Ebene, die dort keinen solchen hat. Dies geschieht an der Stelle $\zeta = a_2 - \frac{a_1^2}{4}$, wie sofort aus der Betrachtung von 2) geschlossen werden konnte.]

4) Durch Hinzufügung des Absolutgliedes erhält man die allgemeine Function 3ten Grades

$$Z = z^3 - a_1 z^2 + a_2 z - a_3,$$

für welche die Riemann'sche Fläche nur eine Verschiebung erleidet.

5) Man fahre nun in der angegebenen Weise fort, zu Functionen höheren Grades überzugehen, wobei man von der expliciten Berechnung der auftretenden kritischen Punkte ganz absehen darf. Für Z' ist dabei stets das zuletzt Absolvirte zu benutzen. Hat man sich dann für eine beliebige ganze Zahl n_1 überzeugt, dass zu der entsprechenden Function n_1^{ten} Grades n_1 Blätter nöthig sind, die sich nach allen Seiten ins Unendliche erstrecken, dass ferner im Allgemeinen, wie sich aus dem Differentialquotienten ergiebt, dessen Grad um 1 niedriger ist, im Endlichen $n_1 - 1$ Verzweigungspunkte 1ter Ordnung vorhanden sind, während der unendliche Punkt ein solcher $(n_1 - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, so kann man aus der vorzunehmenden Multiplication der Function mit z, wodurch eine Function $(n_1 + 1)^{\text{ten}}$ Grades entsteht, schliessen, dass die genannten Beziehungen sich auch von der Function $(n_1 + 1)^{\text{ten}}$ Grades aussprechen lassen. Also:

Die ganze rationale Function n^{ten} Grades breitet sich stetig über n unbegrenzte Blätter aus, sie nimmt jeden Werth n mal an, so auch den Werth Null, so dass n Wurzeln vorhanden sind, die im Allgemeinen verschiedene Werthe haben. Der unendliche Punkt ist Windungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, im Endlichen befinden sich im Allgemeinen $(n-1)$ Windungspunkte 1ter Ordnung, von denen unter Umständen einige zusammenfallen können, um Windungspunkte entsprechend höherer Ordnung zu geben. Jeder dieser Punkte ist mit dem unendlichen durch je einen Verzweigungsschnitt zu verbinden, längs dessen je zwei Blätter in einander übergehen.

Nimmt man zu Verzweigungsschnitten in der Z-Ebene gerade Linien, so entsprechen denselben in der z-Ebene Curven, deren Gleichung wir noch kennen lernen werden. Dieselben passiren im Allgemeinen die den Verzweigungspunkten 1ter Ordnung entsprechenden Punkte, ohne dass Besonderes geschieht, nur so, dass dem $\sphericalangle 360^0$ in der Z-Ebene hier ein solcher von 180^0 entspricht, jede Curve sich also vom kritischen Punkte aus nach beiden Seiten ins Unendliche er-

streckt. Durch alle solche Curven wird die z-Ebene in n Theile getheilt, deren jeder einem Blatte der Z-Ebene entspricht.

Fig. 49 stellt diesen Zusammenhang für den Fall $n = 3$ dar, und zwar unter der Voraussetzung, dass die beiden Verzweigungspunkte nicht zusammenfallen. Die Blätter I und II hängen in V_1, II und III in V_2, I, II und III im unendlichen Punkte zusammen. Längs des Schnittes $V_1 C\infty$ durchkreuzen sich I und II, längs $V_2 D\infty$ geschieht dasselbe mit II und III. Umkreist man V_1 in Blatt I auf kleinem Kreise, so gelangt man ins zweite Blatt und nach doppeltem Umgange ins erste zurück. Umkreist man ebenso V_1 in Blatt III, so bleibt man in III. Was bei V_2 geschieht, lege sich der Leser selbst zurecht, ebenso was bei Umgängen erfolgt, die V_1 und V_2 gleichzeitig umschliessen. Die Umgänge letzterer Art, die durch sämmtliche Blätter führen, können als Umkreisungen des unendlichen Punktes aufgefasst werden, was besonders anschaulich wird, wenn man die Ebene als grosse, im Unendlichen geschlossene Kugel betrachtet. Der unendliche Punkt stellt sich im vorliegenden Falle naturgemäss als Windungspunkt zweiter Ordnung dar. Die Pfeile in der Figur geben den Zusammenhang noch deutlicher an. Die unterbrochenen Linien befinden sich im zweiten, die punktirten im dritten Blatte.

Legt man die beiden Schnitte in Z als *eine* Gerade durch V_1 und V_2, so erhält man in der z-Ebene drei Curven, welche dieser ganzen Geraden entsprechen. Den Schnitten entsprechen die beiden eintheilenden Curven durch den Doppelpunkt V_1 und den Doppelpunkt V_2. Die dritte Curve schneidet, da der Winkel 180^0 in den Windungspunkten hier in 90^0 übergeht, rechtwinklig durch die beiden ersten Curven und geht durch die Punkte $V_1 V'_1$ *und* $V_2 V'_2$.

Man kann von einer solchen Figur wichtige Sätze über die vorliegenden Functionen ohne Weiteres ablesen. Dies soll an Fig. 49 für $n = 3$ geschehen, wobei stets die Verallgemeinerung leicht auszusprechen ist. Die dem Nullpunkte der Z-Ebene entsprechenden Punkte in z sollen dabei *Wurzelpunkte* heissen.

Hat die Function 3ten Grades zwei gleiche Wurzeln, ist sie also von der Form $(z - a)^2 \cdot (z - b)$, so fällt einer der Windungspunkte in den Nullpunkt. Dann geht auch der eine Verzweigungsschnitt von Null aus. Einfache Umkreisung des entsprechenden Wurzelpunktes der z-Ebene auf kleinem Kreise giebt also einen doppelten Umlauf um den Nullpunkt der Z-Ebene, bei dem die reelle Axe zweimal auf der positiven, zweimal auf der negativen Seite durchschnitten wird. Setzt man also

$$f(z) = (z - a)^2 (z - b) = P + Qi,$$

so verschwindet das Verhältniss $\frac{Q}{P}$ bei dieser Wanderung zweimal zwei mal. Hat demnach die Gleichung n^{ten} Grades m gleiche Wurzeln, so ist im Nullpunkte ein Windungspunkt $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorhanden. Einfache Umwanderung des entsprechenden Wurzelpunktes der z-Ebene lässt also das Verhältniss $\frac{Q}{P}$ jetzt $2n$ mal verschwinden. Dies ist der bekannte Cauchy'sche Hilfssatz*), dessen Beweis sich hier ganz von selbst ergiebt.

Hat hingegen die Function 3ten Grades drei gleiche Wurzeln, so fallen V_1 und V_2 zusammen nach dem Nullpunkte der Z-Ebene. Dabei muss auch $f'(z)$ 2 gleiche Wurzeln haben, denn die Windungspunkte ergeben sich aus $f'(z)=0$. Umgekehrt aber folgt aus 2 gleichen Wurzeln von $f'(z)$ nicht, dass auch $f(z)$ gleiche Wurzeln habe, denn das Zusammenfallen von V_1 und V_2 kann auch anderswo, als im Nullpunkte stattfinden.

Man sieht aber sofort ein, dass, wenn $f'(z)$, der Differentialquotient der Function n^{ten} Grades, m gleiche Wurzeln hat, m Windungspunkte 1ter Ordnung zu einem solchen m^{ter} Ordnung irgendwo zusammenfallen, so dass $(m+1)$ Blätter im Zusammenhange stehen. Dem Verzweigungsschnitte, längs dessen dieselben ineinander übergehen, entsprechen dann in der z-Ebene $m+1$ Curvenarme, die sich im entsprechenden Punkte unter Winkeln $\frac{360}{m+1}$ Grad treffen. Dies Alles steht im Einklange mit § 40.

Also: Das Nullwerden *höherer* Ordnung des Differentialquotienten giebt Verzweigungspunkte höherer Ordnung.

Es können auch gruppenweise gleiche Wurzeln in $f(z)$ vorkommen. Dann hängen die Blätter der Z-Ebene im Nullpunkte gruppenweise zusammen, und zwar in jeder Gruppe so viel, als die Anzahl der übereinstimmenden Wurzelwerthe beträgt.

Daraus, dass die Function n^{ten} Grades n Wurzeln hat, kann man auf ihre Zerlegbarkeit in n Factoren schliessen. Man kann zwar auch auf functionentheoretischem Wege auf die Identität zwischen

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

und

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots.(z-\alpha_n)$$

gelangen. Jedoch sei in dieser Hinsicht auf die gebräuchlichen Lehrbücher hingewiesen.

---

*) Vergl. z. B. Serret, Handbuch der Algebra, übersetzt von Wertheim, Bd. I, S. 96.

Setzt man die Zerlegbarkeit voraus, so kann man die obigen Betrachtungen wiederholen, indem man die Ebenen der Functionen $(z-\alpha_1)$, $(z-\alpha_2)$, $\ldots$ $(z-\alpha_n)$ successive miteinander multiplicirt.

§ 81. Transformation der Kreisschaaren und Strahlenbüschel um resp. durch den Nullpunkt der Z-Ebene.

Zwischen der Z-Ebene und z-Ebene bestehen wieder die Beziehungen

1) $Z = f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots a_{n-1} z^{n-1} + a_n$,

oder

2) $$X + Yi = \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [x + yi - (\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)],$$

wo die Grössen $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$ die Wurzeln bedeuten.

Die umgekehrte Function sei

3) $$x + yi = \varphi(X + Yi).$$

Zunächst werde gefragt, welche Curven der z-Ebene dem Strahlenbüschel durch den Nullpunkt der Z-Ebene nebst concentrischer Kreisschaar entsprechen.

Die conjugirte Function zu 2) ist

4) $$X - Yi = \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [x - yi - (\alpha_\varkappa - \beta_\varkappa i)].$$

Durch Multiplication folgt aus 2) und 4)

5) $$X^2 + Y^2 = \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [x + yi - (\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)] \cdot [x - yi - (\alpha_\varkappa - \beta_\varkappa i)]$$

$$= \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [(x - \alpha_\varkappa)^2 + (y - \beta_\varkappa)^2].$$

Jeder Factor des letzten Ausdrucks stellt das Quadrat des Radiusvectors $p_\varkappa$ vom Wurzelpunkte $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$ nach dem Punkte $x + yi$ dar, so dass man nach beiderseitiger Radicirung auch schreiben kann

6) $$R = p_1 \cdot p_2 + \cdots + p_n.$$

Folglich: *Dem Kreise $R = c$ um den Nullpunkt der Z-Ebene entspricht die Curve $p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = c$ der z-Ebene, deren Radii vectores von den Wurzelpunkten der abbildenden Function $Z = f(z)$ ausgehen.*

In der Form

7) $$\frac{1}{2}\lg\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}[(x-\alpha_\varkappa)^2+(y-\beta_\varkappa)^2]=c_1$$

oder

7*) $$\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\lg[(x-\alpha_\varkappa)^2+(y-\beta_\varkappa)^2]=c_1$$

genügt die linke Seite dieser Curvengleichung der Differentialgleichung $\Delta u=0$.

Division der Gleichungen 2) und 4), Logarithmirung und Zusetzung des Factors $\frac{1}{2i}$ führt auf die Gleichung

8) $$\frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi}{X-Yi}=\frac{1}{2i}\lg\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\frac{x+yi-(\alpha_\varkappa+\beta_\varkappa i)}{x-yi-(\alpha_\varkappa-\beta_\varkappa i)}$$
$$=\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-(\alpha_\varkappa+\beta_\varkappa i)}{x-yi-(\alpha_\varkappa-\beta_\varkappa i)},$$

oder nach der schon öfter angewandten Formel

8*) $$\operatorname{arc\,tan}\frac{Y}{X}=\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\operatorname{arc\,tan}\frac{y-\beta_\varkappa}{x-\alpha_\varkappa}.$$

Setzt man statt der Bogen einfach die Neigungswinkel der obigen Radii vectores ein, was ihrer Bedeutung entspricht, so findet man schliesslich

9) $$\Theta=\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n.$$

Dem Strahlenbüschel $\Theta=\gamma$ durch den Nullpunkt der Z-Ebene entsprechen also in der z-Ebene Curven von der Form

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n=\gamma,$$

wobei die ϑ die Richtungswinkel der von den Wurzelpunkten ausgehenden Radii rectores sind.

In der Form

10) $$\sum\operatorname{arc\,tan}\frac{y-\beta_\varkappa}{x-\alpha_\varkappa}=\gamma,$$

die sich nach 8) mit Hilfe des Imaginären auch logarithmisch schreiben lässt, wodurch sie der nach 5) imaginär geschriebenen Gleichung für die Curven 7) ganz analog wird, genügt die linke Seite der Differentialgleichung $\Delta u=0$. Die Curven 9) sind die Orthogonalschaar zu 6.

Für den Fall $n=2$ erhält man die Cassini-Curven oder Lemniscaten $p_1\,.\,p_2=c$ und die gleichseitigen Hyperbeln $\vartheta_1+\vartheta_2=\gamma$. Es liegt also nahe, auch hier von *Lemniscaten* und *Hyperbeln* n^{ter}

Ordnung zu reden, jedoch müssen sie wegen der beliebigen Lage der n „Brennpunkte" als *irreguläre* bezeichnet werden.*)

In beiden Ebenen entsprechen sich ganz allgemein die Curven

$$11)\quad \begin{cases} f(R, \Theta) = 0 \\ \text{und} \\ f[(p_1 p_2 \cdots p_n), (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n)] = 0, \end{cases}$$

wo f irgend eine Function — nicht etwa das besprochene $f(z)$ — bedeutet.

So geht z. B. die Gleichung der logarithmischen Spiralen

$$R = ck^{\Theta}$$

über in

$$12)\quad p_1 p_2 \ldots p_n = ck^{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n}.$$

Die isogonalen Trajectorien der isothermischen Schaar irregulärer Lemniscaten oder Hyperbeln n^{ter} Ordnung folgen also dem Gesetz, dass die Winkelsumme arithmetisch wächst, sobald das Product der Radii vectores sich geometrisch ändert.

Sie sind die Diagonalcurven des isothermischen Rechtecksnetzes, welches entsteht, wenn man den Parametern c und γ der Gleichungen 7) und 10) Werthe giebt, die in der früher besprochenen Weise arithmetischen Reihen folgen. Ihre Eigenschaften lassen sich aus denen der logarithmischen Spirale ableiten. Hat die Function $Z = f(z)$ gruppenweise gleiche Wurzeln, ist z. B.

$$13)\quad f(z) = (z - \alpha_1)^{m_1} (z - \alpha_2)^{m_2} \ldots (z - \alpha_n)^{m_n},$$

so gehen die Kreise $R = c$ und die Geraden $\Theta = \gamma$ der Z-Ebene in folgende Curven über:

$$14)\quad p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n} = c,$$

$$15)\quad m_1 \vartheta_1 + m_2 \vartheta_2 + \cdots + m_n \vartheta_n = \gamma.$$

Es fallen nämlich jedesmal mehrere Radii vectores zu einem zusammen, und zwar $q + 1$ bei einem Windungspunkte q^{ter} Ordnung, in dem eben $q + 1$ Blätter zusammenhängen.

Abgesehen von den Specialfällen, die durch das Zusammenfallen der Wurzeln entstehen, ist demnach der Verlauf der beiden Curvengruppen aus Folgendem zu entnehmen. $A_1, A_2 \ldots A_n$ seien die Wurzelpunkte der z-Ebene, die dem Nullpunkte A der Z-Ebene entsprechen, $V_1, V_2 \ldots V_{n-1}$ seien die endlichen Windungspunkte der Z-Ebene, nach ihrer Entfernung vom Nullpunkte geordnet. Jedem derselben entsprechen in der z-Ebene n Punkte $V_x^{(n)}$, von

*) Darboux, der in Bd. IX der Annalen von Bordeaux dieselben Curven behandelt, bezeichnet sie als Cassioniden.

denen zwei zu einem *Kreuzungspunkte**) zusammenfallen, in dem die entsprechenden Winkel der Z-Ebene halbirt erscheinen. [Division des Winkels durch 3 findet beim Kreuzungspunkte 2ter Ordnung statt, Division durch $m+1$ beim Kreuzungspunkte m^{ter} Ordnung.] Einem verschwindend kleinen Kreise um den Punkt A der Z-Ebene entsprechen n kleine Kreise um die Wurzelpunkte der z-Ebene. Man lasse den erstgenannten Kreis anschwellen, dann geschieht dasselbe mit den n Kreisen der z-Ebene, nur haben dieselben das Streben, nach den Kreuzungspunkten hin sich zu Ovalen zuzuspitzen. Passirt der Kreis der Z-Ebene den nächsten Verzweigungspunkt V_1, so vereinigen sich zwei der Ovale zu *einem* Linienzuge nach Art der gewöhnlichen Lemniscate. Die Schleife bildet in dem Kreuzungspunkte, der V_1 entspricht, Winkel von 90^0. Wächst der erstgenannte Kreis weiter, so schwellen die restirenden $n-1$ Curvenarme an, bis sich beim Passiren von V_2 wiederum ein Oval mit der bereits einen Kreuzungspunkt umschliessenden Curve vereinigt. So geht es weiter, bis endlich alle Kreuzungspunkte umschlossen sind und der einfach geschlossene Linienzug sich mehr und mehr der Kreisgestalt nähert. In Figur 52 ist dies schematisch für den Fall $n=3$ dargestellt.

Das Verhalten der Hyperbeln n^{ter} Ordnung, die dem Strahlenbüschel durch Null entsprechen, ist folgendes: Da die unendlichen Bereiche sich ebenso, wie bei der Abbildung $Z=z^n$ entsprechen, so hat jede Hyperbel n^{ter} Ordnung $2n$ unter gleichen Winkeln $\frac{\pi}{n}$ aufeinander folgende Asymptoten**). Im Allgemeinen hat die Curve n von einander getrennte Arme. Die Asymptoten eines jeden schliessen den Winkel $\frac{\pi}{n}$ ein. Passirt aber die Gerade der Z-Ebene einen Verzweigungspunkt, z. B. V_1, so treffen zwei der n Curven-

*) Der Name ist der während des Drucks erschienenen Schrift von Klein: „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale", Leipzig, 1882, entnommen.

**) In Figur 52 ist angenommen, dass die Asymptoten sämmtlich durch *einen* Punkt, den Schwerpunkt der Punktgruppe, gehen. Diese Vermuthung finde ich während der Correctur bestätigt durch Einblick in einen Aufsatz von F. Lucas im Journal de l'École polytechnique, XLVI, 1879: „Géometrie des polynomes". Zu eingehender Erörterung fehlt hier der Raum. Der Beweis wird dadurch erledigt, dass die Gruppen von Wurzelpunkten, welche unserer Function $f(z)$ und den Functionen $[f(z)-\lambda]$ entsprechen, sämmtlich gemeinschaftlichen Schwerpunkt haben, da in sämmtlichen Functionen dieser Art z^{n-1} denselben Factor hat, folglich die „Summen der Wurzelpunkte" $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}(\alpha_\varkappa+\beta_\varkappa i)$ in allen gleich sind. Verlegt man also den Coordinatenanfang

arme im entsprechenden Kreuzungspunkte zusammen, wo jeder eine Ecke von 90^0 erhält, so dass ein scheinbares Durchkreuzen unter 90^0 stattfindet. [In Kreuzungspunkten höherer Ordnung treffen mehrere Arme unter entsprechend kleineren Winkeln zusammen.]

Figur 52 veranschaulicht auch dieses Verhalten für $n = 3$. Es ist willkürlich angenommen, dass die Windungspunkte V_1 und V_2 auf der reellen resp. imaginären Axe liegen, dass auch die Verzweigungsschnitte in den beiden Axen liegen und in positiver Richtung nach dem unendlichen Punkte gehen. Wie die Z-Ebene hier in Quadranten eingetheilt ist, so zerlegt sich die ζ-Ebene in Theile, deren asymptotische Grenzen unter 30^0 aufeinander folgen. V_1 und V_2 sind die Kreuzungspunkte der ζ-Ebene, während V_1' und V_2' die isolirt bleibenden Punkte (ohne weitere Bedeutung) sind, die auch den Punkten V_1 und V_2 der Z-Ebene entsprechen. Aus den gleichnamigen Buchstaben ergeben sich die wesentlichen Beziehungen beider Ebenen. Die Curve $B_1 V_2 B_2$ grenzt den Theil ab, der etwa dem obersten Blatte entspricht, die Curve $D_2 V_1 D_3$ grenzt den dem dritten Blatte entsprechenden Raum ab. Der Rest zwischen beiden verbleibt dem Mittelblatte. Der dem obersten Blatte entsprechende Theil ist vertical schraffirt, der dem untersten entsprechende horizontal, der Mitteltheil ist unschraffirt geblieben.

In ähnlicher Weise kann man bei jeder Function n^{ten} Grades diese Hyperbeln n^{ter} Ordnung zur Festlegung der Verzweigungsschnitte benutzen. Nur wenn auf derselben Geraden durch Null mehrere Verzweigungspunkte liegen, wendet man besser andere im nächsten Abschnitt zu besprechende Hyperbeln n^{ter} Ordnung an.

---

nach diesem Schwerpunkte, so verschwindet für alle solche Functionen der Factor von ζ^{n-1}, also auch für alle Glieder $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in dem transformirten Ausdrucke $\frac{Y}{X} = \tan\alpha$ resp. $\frac{Y-b_1}{X-a_1} = \tan\alpha$, von denen der letztere erst im nächsten Abschnitt behandelt wird. Daraus schliesst Lucas auf das Zusammentreffen der Asymptoten. Die Bemerkung ist jedenfalls von weitergehendem Interesse, da die Theorie des Schwerpunktes zu der Lehre von den algebraischen Gleichungen in eigenthümliche Beziehung gesetzt wird. Da die Asymptoten der einem Strahlenbüschel entsprechenden Curven eine regelmässige sternförmige Anordnung erhalten, bezeichnet sie Lucas als „*Stelloiden*". Unsere Figur enthält die von Lucas gegebenen als Specialfälle. In den Comptes Rendus vom 27. März 1882, in den Bulletins de la Société de Physique page 298, und im Journal de Physique von 1882 sind die Lucas'schen Specialfiguren von Guébhard reproducirt. In Fig. 5 der Abhandlung in den Bulletins z. B. ist eine Symmetrieaxe angenommen, wodurch erreicht wird, dass das Vereinigen der drei Ovale zu *einer* Curve gleichzeitig stattfindet. — Wäre mir die Lucas'sche Arbeit früher bekannt gewesen, so würde ich dem Capitel X noch manche Bemerkung zugefügt haben.

Die hier erörterten Curvensysteme haben nun folgende physikalische Bedeutung:

1) In eine unbegrenzte ebene Platte ströme in den Punkten (kleinen Kreisen) $a_1, a_2, \ldots a_n$ Elektricität ein, und zwar überall gleich stark, während sie im unendlichen Bereiche abgeleitet wird. Die Curven gleicher Spannung sind dann die irregulären Lemniscaten n^{ter} Ordnung

$$\lg p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = c,$$

die Strömungslinien hingegen sind die Curven

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = \gamma.$$

2) Ist eine dieser Hyperbeln positive, eine andere negative Elektrode, so sind die zwischenliegenden Hyperbeln Spannungscurven, die Lemniscaten hingegen Stromlinien. Die Wurzelpunkte erhalten also die Bedeutung von Wirbelpunkten.

3) Giebt die eine Punktelektrode m_1 Stromeinheiten ab, die 2te m_2, die 3te m_3 etc., so sind die Spannungscurven von der Form

$$\lg p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n} = c,$$

die Stromlinien von der Form

$$m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2 + \cdots + m_n\vartheta_n = \gamma.$$

Die Intensität der aus der Elektrode strömenden Elektricität hängt also zusammen mit der Ordnung des betreffenden Windungspunktes und der Anzahl der im Nullpunkte zusammenhängenden Blätter. Man hat gewissermassen mehrfache elektrische „Belegungen".

4) Die Rollen beider Curvenschaaren vertauschen sich, wenn zwei der letztgenannten Curven entgegengesetzte Elektricitäten aussenden.

5) Selbstverständlich kann man auch eine der Lemniscaten zur Einströmungselektrode, eine andere derselben Schaar zur Ableitungselektrode machen.

Die entsprechenden Wärmeprobleme und hydrodynamischen Deutungen werden dem Leser überlassen.

§ 82. Transformation beliebiger Kreisschaaren und Strahlenbüschel der Z-Ebene.

Um zu sehen, in welche Curven die Kreisschaaren um einen Punkt $a + bi$ der Z-Ebene und die Strahlenbüschel durch denselben übergehen, setze man, dem Obigen entsprechend,

1) $X + Yi - (a + bi) = f(x + yi) - (a + bi)$,

also auch

2) $X - Yi - (a - bi) = f(x - yi) - (a - bi)$,

und denke sich die rechten Seiten, die wiederum ganze rationale

Functionen n^{ten} Grades mit 1 als Factor der höchsten Potenz sind, in ihre n Factoren zerlegt. Sind nun die neuen Wurzeln der rechten Seite von Gleichung 1) durch $\lambda_x + \mu_x i$ dargestellt, also die von 2) durch $\lambda_x - \mu_x i$, und multiplicirt und dividirt man wie oben unter Zuordnung conjugirter Factoren, so erhält man, wenn nach der Division wieder die obigen Zusätze gemacht werden:

$$3)\quad R^2 = (X-a)^2 + (Y-b)^2 = \prod_{x=1}^{x=n} [(x-\lambda_x)^2 + (y-\mu_x)^2] = (p_1 p_2 \cdots p_n)^2,$$

$$4)\quad \Theta = \frac{1}{2i} \lg \frac{X+Yi-(a+bi)}{X-Yi-(a-bi)} = \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{2i} \lg \frac{x+yi-(\lambda_x+\mu_x i)}{x-yi-(\lambda_x-\mu_x i)} = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n,$$

wobei die Radii vectores von den neuen Wurzelpunkten $\lambda_x + \mu_x i$ ausgehen, die übrigens auch durch $\varphi(a+bi)$ definirt sind. Also:

Den Kreisen $R = c$ um einen Punkt $a + bi$ der Z-Ebene entsprechen irreguläre Lemniscaten n^{ter} Ordnung um die n durch $\varphi(a+bi)$ repräsentirten Punkte, den Geraden $\Theta = \gamma$ durch jene Punkte die irregulären Hyperbeln n^{ter} Ordnung durch die entsprechende Punktgruppe.

Die Gleichungen der beiden Curvenschaaren, die wiederum orthogonale Isothermensysteme sind, haben, wie oben, die Form

$$5)\quad p_1 p_2 \cdots p_n = c,$$

$$6)\quad \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = \gamma,$$

ihre isogonalen Trajectorien haben gleichfalls die obige Gleichung

$$7)\quad p_1 p_2 \cdots p_n = c\varkappa^{\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n},$$

und den Curven $\psi(R\Theta) = 0$ der Z-Ebene, deren Polarcoordinaten sich auf einen beliebigen Punkt $a + bi$ beziehen, gehen wieder über in Curven

$$8)\quad \psi[(p_1 p_2 \cdots p_n), \quad (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n)] = 0,$$

deren Radii vectores von den Punkten $\varphi(a+bi)$ oder den Wurzelpunkten von $f(x+yi) - (a+bi)$ ausgehen.

Passiren Kreis oder Gerade einen Windungspunkt, so entstehen wieder die besprochenen Durchschnitte der Curvenarme in der z-Ebene, also für alle Curven dieser Art in denselben Punkten. Ist der Kreis um einen Windungspunkt $(m-1)^{ter}$ Ordnung geschlagen, so tritt der Factor q_x^m oder der Winkel $m\vartheta_x$ in Gleichung 5) resp. 6) ein. Auch die übrigen Gestaltungsverhältnisse sind ähnlich, wie vorher.

Nach diesen Bemerkungen lässt sich die gesammte Geometrie des Kreises, der Geraden, der projectivischen Gebilde etc. in dieses neue Gebiet lemniscatischer Geometrie übertragen.

Nur einige Beispiele seien angeführt.

Die Gleichungen $\frac{p}{q} = c$ und $\varphi - \chi = \gamma$, deren Radii vectores von zwei Punkten $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ ausgehen, stellen zwei orthogonale Kreisschaaren dar, von denen die letztere durch die beiden Punkte geht. Folglich:

Ist $\varphi(Z)$ die Umkehrung einer ganzen rationalen Function $f(x + yi)$ obiger Art, und sind $\varphi(a + bi)$ und $\varphi(a_1 + b_1 i)$ zwei Punktgruppen der z-Ebene, so stellen die Gleichungen

$$9) \qquad \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} = c,$$

$$10) \quad (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) - (\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n) = \gamma$$

zwei Orthogonalschaaren irregulärer Lemniscaten n^{ter} Ordnung dar, von denen die letztere Schaar durch beide Punktgruppen geht.

Die Gleichung der zugehörigen isogonalen Trajectorien lautet:

$$11) \qquad \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} = c\varkappa^{(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n)},$$

und ihre Eigenschaften folgen aus denen der isogonalen Trajectorien des Kreisbüschels.

Die Gleichung der Geraden $\Theta = \gamma$ durch den Punkt $a + bi$ lässt sich für beliebige andere Punkte auf ihr in der Form $\Theta = \gamma$ schreiben. Folglich: Die Hyperbel n^{ter} Ordnung

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = \gamma$$

durch die Punktgruppe $\varphi(a + bi)$ hat in Bezug auf unendlich viele Punktgruppen $\varphi(a_1 + b_1 i)$, durch welche sie geht, dieselbe Gleichung.

Die Gleichung eines Kreises kann in Bezug auf beliebig viele paarweise zusammengehörige Punkte in der Form $\frac{p}{q} = c$ geschrieben werden, oder, wenn die Punktpaare in gleichem Abstande auf der Kreisperipherie gewählt werden, in der Form $\varphi - \chi = \gamma$. Auch dies lässt sich in leicht auszusprechender Weise auf die irregulären Lemniscaten n^{ter} Ordnung übertragen.

Specialfälle für die Curven 9, 10 und 11 treten ein, wenn Windungspunkte zu Ausgangspunkten der Radii vectores werden. Dann treten einzelne der letzteren in höheren Potenzen auf, wäh-

rend die Winkel φ resp. χ mit der entsprechenden Zahl multiplicirt erscheinen.

Eine physikalische Deutung der Curven 9) und 10) ist folgende: Strömt in den n durch $\varphi(a + bi)$ definirten Punkten Elektricität gleich stark in die unbegrenzte Platte ein, und wird sie in dem durch $\varphi(a_1 + b_1 i)$ gegebenen Punkten abgeleitet, so sind die Curven 9) Spannungscurven, die Curven 10) Stromlinien. Strömt Elektricität durch eine der Curven 9) oder 10) ein, durch eine der Curven 9) oder 10) ab, so stellen die zwischenliegenden Curven der einen Art die Linien gleichen Potentials dar, die der andern Art die Stromlinien. Auch je zwei der Curven 11) können als entgegengesetzte Elektroden verwendet werden.

Die wichtigeren Eigenschaften dieser Curvenschaaren und die Uebertragungen der projectivischen Beziehungen kann man zum Theil direct aus den Betrachtungen des vorigen Capitels ablesen, nur treten an Stelle der regulären Polygone unregelmässige Figuren. Volle Willkür werden erst die Betrachtungen des folgenden Capitels geben.

Bezeichnen übrigens f und f_1 ganze rationale Functionen n^{ten} resp. m^{ten} Grades, φ und φ_1 ihre Umkehrungen, so vermittelt die Function

$$12) \qquad X + Yi = \varphi_1 [f(x + yi)]$$

eine mehrdeutige isogonale Verwandtschaft zweier Ebenen, bei welcher je n Punkte $\varphi(a + bi)$ der einen m Punkten $\varphi_1(a + bi)$ der andern entsprechen, während jedes Büschel irregulärer Lemniscaten n^{ter} Ordnung durch die erste Punktgruppe in ein solches m^{ter} Ordnung durch die zweite Gruppe übergeht und auch die orthogonalen Lemniscatenschaaren n^{ter} und m^{ter} Ordnung einander entsprechen.

Zahlreiche Sätze über diese allgemeinere isogonale Verwandtschaft lassen sich aussprechen, sobald man eine Hilfsebene $\zeta = \xi + \eta i$ den Abbildungen

$$X + Yi = \varphi_1(\xi + \eta i) \quad \text{und} \quad x + yi = \varphi(\xi + \eta i)$$

unterwirft.

Es bliebe noch die Frage übrig, in welche Curven die Kreisschaaren und Strahlenbüschel der z-Ebene bei der Abbildung $Z = f(z)$ übergehen, sobald $f(z)$ eine ganze rationale Function ist. Wie schon bemerkt, lässt sich diese Frage nur dann eingehend beantworten, wenn man im Stande ist, die umgekehrte Function $z = \varphi(Z)$ explicit darzustellen. In Folge dessen lässt sich nicht viel mehr All-

gemeines sagen, als in den Paragraphen 41 und 42 angegeben ist. Die auftretenden Rückkehrpunkte aber, ebenso die dieselben umgebenden Schleifen sind durch die Untersuchungen über die Windungspunkte bereits klar gelegt. Die Fälle möglicher expliciter Darstellung führen auf Curvenschaaren, die einer vollständigen Behandlung fähig sind und als *irreguläre cardioidische Curvensysteme höherer Ordnung* bezeichnet werden können.

Kinematische Betrachtungen, Aufgaben über conforme Abbildung gewisser Flächenräume auf einander, Transformationen complicirterer physicalischer, z. B. electrodynamischer Probleme etc. könnten in derselben Weise, wie in den vorhergehenden Capiteln, angeknüpft werden. Wir überlassen die Behandlung solcher Uebungsbeispiele dem Leser.

§ 83. Litteratur.

1) Den Gegenstand dieses Capitels behandelte der Verfasser in derselben Weise, wie hier, im Programm 1880 der Königl. Gewerbeschule zu Hagen, dem auch die Zeichnung der allgemeinen dreiblättrigen Riemann'schen Fläche entnommen ist (Fig. 49).

2) Die mehrfach citirten Abhandlungen von Hildebrandt und Guébhard geben einige Specialfälle der betrachteten Curvenschaaren durch Zeichnungen wieder.

3) Die hierher gehörigen Arbeiten von Lucas und Darboux sind bereits citirt.

4) Die Methode des § 79 hängt zusammen mit der, welche Kinkelin in einem Aufsatze: „Neuer Beweis des Vorhandenseins complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung", Mathem. Annalen, I, S. 502, anwendet.

5) In letzterer Arbeit wird folgende Zusammenstellung der Litteratur über den Fundamentalsatz der Algebra gegeben: Erster Beweis von Gauss, 1799 (Werke, Bd. III, S. 1), Cauchy (1821, Cours d'analyse, S. 331), 2ter und 3ter Beweis von Gauss (1815 und 1816, Werke, III, S. 31 und 57), Serret (Cours d'algèbre supérieure, 1866, Bd. I, S. 97), Ulherr (Crelle's Journal, 31, S. 231) 4ter Beweis von Gauss (1849, Werke, III, S. 70). Im Crelle'schen Journal befinden sich noch andere, zum Theil auf geometrischer Veranschaulichung beruhende Beweise. Gordan sucht in Bd. X der Mathem. Annalen S. 572 den 2ten Beweis von Gauss zu vereinfachen. Im Uebrigen vergleiche man die Lehrbücher.

6) Die in § 47 angegebenen Lehrbücher über die Theorie der Functionen complexen Arguments geben sämmtlich Abschnitte über

die ganzen rationalen Functionen. Auf die hier angedeuteten geometrischen Verhältnisse wird jedoch nirgends in hinreichender Weise eingegangen. Gerade hierdurch aber wird das wichtige Gebiet der allzugrossen Abstraction entrückt, die auf den Anfänger stets abschreckend wirkt. Klein macht in seiner neuesten Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebr. Functionen" die physikalischen Deutungen zum Ausgangspunkte der ganzen Betrachtung und gewinnt durch diese Veranschaulichung viel für die Verständlichkeit des Ganzen.

Elftes Capitel.

Abbildung mittels gebrochener rationaler Functionen und ihrer Umkehrungen.

§ 84. Die irregulären Lemniscaten und Hyperbeln von der Ordnung $\frac{n}{m}$, welche zum Nullpunkte der Z-Ebene gehören.

Die abbildende Function sei

$$1) \qquad Z = f(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)},$$

wo φ und φ_1 ganze rationale Functionen vom n^{ten} resp. m^{ten} Grade sind, deren höchste Glieder z^n resp. z^m der Einfachheit halber wieder den Factor 1 haben mögen.

Die Umkehrung der Function sei

$$2) \qquad z = \psi(Z).$$

Nach vorigem Capitel ist

$$3) \qquad X + Yi = \frac{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [x + yi - (\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i])}{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} [x + yi - (a_\varkappa + b_\varkappa i])},$$

wo die $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$ die Wurzeln der Function φ, die $a_\varkappa + b_\varkappa i$ die der Function φ_1 bedeuten. Die conjugirte Function ist also

$$4) \qquad X - Yi = \frac{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [x - yi - (\alpha_\varkappa - \beta_\varkappa i)]}{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} [x - yi - (a_\varkappa - b_\varkappa i)]}.$$

Durch Multiplication und Division, letztere verbunden mit Logarithmirung und Zusetzung des Factors $\frac{1}{2i}$, erhält man, wie im vorigen Capitel, aus den Gleichungen 3) und 4) folgende:

$$5)\quad R^2 = X^2 + Y^2 = \frac{\prod_{x=1}^{x=n}[(x-\alpha_x)^2+(y-\beta_x)^2]}{\prod_{x=1}^{x=m}[(x-a_x)^2+(y-b_x)^2]} = \left(\frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_m}\right)^2,$$

$$6)\quad \Theta = \frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi}{X-Yi} = \sum_{x=1}^{x=n}\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-(\alpha_x+\beta_x i)}{x-yi-(\alpha_x-\beta_x i)}$$

$$-\sum_{x=1}^{x=m}\frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-(a_x+b_x i)}{x-yi-(a_x+b_x i)}$$

$$= (\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_m).$$

(Die Abweichungen φ dürfen nicht mit den Functionen φ und φ_1 in Gleichung 1) verwechselt werden. Die Buchstaben wurden wegen der Analogie mit dem Früheren beibehalten.)

Gehen also die Radii vectores p_x von n willkürlichen Punkten $\alpha_x + \beta_x i$ der z-Ebene, die Radii vectores q_x von m willkürlichen Punkten $a_x + b_x i$ aus, so lassen sich die durch die Gleichungen

$$7)\qquad \lg\frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_m} = c$$

$$8)\quad (\varphi_1+\varphi_2+\cdots\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_m) = \gamma$$

dargestellten Curvensysteme durch die Abbildung mittels der Function $Z = f(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)}$ von der Form 3) in ein System von Kreisen $\lg R = c$ und Geraden $\Theta = \gamma$ um resp. durch den Nullpunkt der Z-Ebene verwandeln.

Daraus folgt, dass die Curven 7) und 8) orthogonale Isothermenschaaren sind, welche die *z-Ebene* in ein „ähnliches Rechteckssystem“ eintheilen, sobald die Parameter c und γ arithmetische Werthreihen annehmen. Im Anschluss an die Bezeichnungen der früheren Capitel sollen sie als *irreguläre Lemniscaten resp. Hyperbeln von der Ordnung $\frac{n}{m}$ (im Falle $m = n$ von der Ordnung $\frac{m}{m}$) bezeichnet werden.*

Führt man in ihre Gleichungen Cartesische Coordinaten mittels der Beziehungen $p_x = \sqrt{(x-\alpha_x)^2+(y-\beta_x)^2}$,

$q_x = \sqrt{(x-a_x)^2+(y-b_x)^2}$, $\varphi_x = \arctan\frac{y-\beta_x}{x-\alpha_x}$, $\chi_x = \arctan\frac{y-b_x}{x-a_x}$

ein, so genügen die linken Seiten von 6) und 7) der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$.

In beiden Ebenen entsprechen sich also die Curven

$$9)\quad \begin{cases} f(R, \Theta) = 0 \\ \text{und} \\ f\left[\dfrac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_m},\ \{(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_m)\}\right]=0. \end{cases}$$

So gehen z. B. die logarithmischen Spiralen $R = ck^{\Theta}$ über in die isogonalen Trajectorien der Curven 7) und 9). Ihre Gleichung lautet:

$$10)\quad \frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_m} = c \cdot k^{(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_m)}.$$

Treten in den Functionen $\varphi(z)$ und $\varphi_1(z)$ gruppenweise gleiche Wurzeln auf, d. h. kommen die Factoren $x + yi - (\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i)$ resp. $x + yi - (a_\varkappa + b_\varkappa i)$ in höheren Potenzen $\nu_\varkappa$ resp $\mu_\varkappa$ vor, so gehen die Gleichungen 7) 8) 10), wenn φ vom Grade $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \nu_\varkappa$, φ_1 vom Grade $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} \mu_\varkappa$ ist, über in

$$11)\quad \lg \frac{p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \cdots p_n^{\nu_n}}{q_1^{\mu_1} \cdot q_2^{\mu_2} \cdots q_m^{\mu_m}} = \lg \frac{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} p_\varkappa^{\nu_\varkappa}}{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} q_\varkappa^{\mu_\varkappa}} = c,$$

$$12)\quad (\nu_1\varphi_1 + \nu_2\varphi_2 + \cdots + \nu_n\varphi_n) - (\mu_1\chi_1 + \mu_2\chi_2 + \cdots + \mu_m\chi_m) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \nu_\varkappa \varphi_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \mu_\varkappa \chi_\varkappa = \gamma,$$

$$13)\quad \frac{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} p_\varkappa^{\nu_\varkappa}}{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} q_\varkappa^{\mu_\varkappa}} = ck^{\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \nu_\varkappa \varphi_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \mu_\varkappa \chi_\varkappa}.$$

Um das Wesen der Curvenschaaren 7) und 8), 11) und 12) vorläufig zu veranschaulichen, sollen einige elektrodynamische Deutungen versucht werden, die sich daraus ergeben, dass man den Zustand der Z-Ebene, in der z. B. im Nullpunkte Elektricität einströmt, im Unendlichen abgeleitet wird (und zwar in sämmtlichen vorhandenen Blättern), conform auf die z-Ebene mittels $z = \psi(Z)$, der umgekehrten Function von $Z = f(z)$, überträgt.

a) Zunächst sei $m = n$. Dann wird $Z = f(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)}$ n mal 0, und zwar für $\varphi(z) = 0$, d. h. für die n Wurzelpunkte $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$, nicht aber für $z = \infty$, da dann $\varphi(z)$ und $\varphi_1(z)$ beide gleich hoher Ordnung unendlich werden. Die n Einströmungspunkte der Elektricität sind also die Punkte $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$. Ferner wird Z unendlich gross für $\varphi_1(z) = 0$, d. h. für die m Punkte $a_\varkappa + b_\varkappa i$. Diese werden Ausströmungspunkte. Folglich: *Strömt in eine unbegrenzte Platte durch n punktförmige willkürlich liegende Elektroden* $a_\varkappa + \beta_\varkappa i$ *von gleicher Intensität Elektricität ein, durch n andere willkürlich liegende* $a_\varkappa + b_\varkappa i$ *aus, so sind für den stationären Zustand die Curven*

$$14) \qquad \lg \frac{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} p_\varkappa}{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} q_\varkappa} = c,$$

Spannungscurven, während die Linien

$$15) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \chi_\varkappa = \gamma$$

Strömungslinien sind. Dabei ist

$$p_\varkappa = \sqrt{(x-\alpha_\varkappa)^2 + (y-\beta_\varkappa)^2} \quad \text{und} \quad q_\varkappa = \sqrt{(x-a_\varkappa)^2 + (y-b_\varkappa)^2}.$$

b) Von den Punkten $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$ mögen mehrere zusammenfallen, z. B. jedesmal $n_\varkappa$, ebenso von den Punkten $a_\varkappa + b_\varkappa i$ jedesmal $\mu_\varkappa$, dann strömt in den Punkten $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$ die Elektricität in Intensitäten ein, die sich verhalten, wie die ganzen Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$, in den Punkten $a_\varkappa + b_\varkappa i$ strömt *die gleiche Quantität* aus in Intensitäten, die sich verhalten, wie die ganzen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$. Die Spannungscurven und Stromlinien sind dann durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$16) \qquad \lg \frac{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} p_\varkappa^{\nu_\varkappa}}{\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} q_\varkappa^{\mu_\varkappa}} = c,$$

$$17) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \nu_\varkappa \varphi_\varkappa - \sum_{\varkappa=m}^{\varkappa=m} \mu_\varkappa \chi_\varkappa = \gamma,$$

wobei jedoch die Summe der $\nu_\varkappa$ *gleich der Summe der* $\mu_\varkappa$ *sein muss.* Dabei treten in der Z-Ebene näher zu besprechende Verzweigungspunkte, in der z-Ebene Kreuzungspunkte auf.

c) Der Fall, wo $n > m$ ist, wo *also* $\varphi(z)$ *mehr Factoren hat, als* $\varphi_1(z)$, erledigt sich folgendermassen. Z nimmt den Werth Null n mal an, und zwar in den n Wurzelpunkten $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$, die sich aus $\varphi(z) = 0$ ergeben, nicht aber öfter, da für $z = \infty$ auch $Z = \infty$ gross wird, dessen Zähler von höherer Ordnung unendlich wird, als der Nenner. Auch den Werth ∞ nimmt Z n mal an, erstens m mal in den m Punkten $a_\varkappa + b_\varkappa i = 0$, die sich aus $\varphi_1(z) = 0$ ergeben, zweitens für den schon erwähnten Punkt $z = \infty$, wo ein Unendlichwerden $(n - m)^{\text{ter}}$ Ordnung stattfindet, welches als ein $(n - m)$ maliges 1ter Ordnung aufgefasst werden kann. *Es liegen also im Endlichen die n Einströmungspunkte* $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$, *von den n Ausströmungspunkten aber liegen m an den endlichen Stellen* $a_\varkappa + b_\varkappa i$, *der Rest von* $(n - m)$ *Ausströmungspunkten liegt im Unendlichen.* Die Spannungscurven sind dann von der Form 7), die Strömungscurven von der Form 8). Hierher gehören z. B. die in Capitel VIII besprochenen Curven $\lg \frac{p \cdot q}{2r} = c$ und $\varphi + \chi - \vartheta = \gamma$, die in Fig. 40 dargestellt sind.

d) Auch hier können die Punkte gruppenweise zusammenfallen, wobei für die Intensitäten dasselbe eintritt, wie unter b). Man kommt dann auf die Gleichungen 11) und 12), bei deren Deutung man also darauf zu achten hat, dass, *da die Summe der* $\nu_\varkappa$ *die der* $\mu_\varkappa$ *übertrifft, eine entsprechende Anzahl von Ausströmungspunkten ins Unendliche zu verlegen ist.*

e) Der Fall $Z_1 = f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)}$, wo der Zähler vom m^{ten}, der Nenner vom n^{ten} Grade und $n > m$ ist, erledigt sich aus dem Falle c) durch Reciprocität, da $Z_1 = \frac{1}{Z}$ ist. Man hat nämlich n Ableitungspunkte an den Stellen $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$, dagegen m Einströmungsstellen in den endlichen Punkten $a_\varkappa + b_\varkappa i$ und ausserdem $n - m$ Einströmungen im unendlichen Bereiche. Alle Elektroden sind dabei als von gleicher Intensität vorauszusetzen. Der Fall gleicher Wurzeln von φ oder φ_1 erledigt sich wie vorher.

Der geometrische Verlauf der Curven kann erst besprochen werden, wenn die auftretenden Windungs- und Kreuzungspunkte zur Untersuchung gelangt sind, was in § 86 geschehen wird.

§ 85. Transformation beliebiger Strahlenbüschel und Kreisschaaren der Z-Ebene.

Um die Geometrie der Z-Ebene vollständig in die der z-Ebene zu übertragen, muss man wissen, in welche Curven beliebige Ge-

rade und Kreise der ersteren übergehen. Es ergeben sich als entsprechende Curven wiederum irreguläre Hyperbeln und Lemniscaten von der Ordnung $\frac{n}{m}$.

Aus

$$Z = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} = f(z)$$

folgt nämlich

$$Y + Yi - (a + bi) = f(x + yi) - (a + bi) = \frac{\varphi(x+yi)}{\varphi_1(x+yi)} - (a+bi)$$
$$= \frac{\varphi(x+yi) - (a+bi)\,\varphi_1(x+yi)}{\varphi_1(x+yi)}.$$

Hier ist der Zähler wiederum eine ganze rationale Function n^{ten} oder m^{ten} Grades, je nachdem n grösser oder kleiner als m ist. Der Nenner ist eine solche Function m^{ten} Grades. Man kann also dieselben Factorenzerlegungen vornehmen, wie vorher, nur ist jetzt der constante Factor des Gliedes höchster Potenz zu berücksichtigen. Bildet man ebenso die conjugirte Function, multiplicirt und dividirt man in derselben Weise — letzteres unter Zusetzung des Factors $\frac{1}{2i}$ nach geschehener Logarithmirung — so erhält man wiederum Gleichungen, die im Wesentlichen von der Form 5) und 6) des vorigen Paragraphen sind. Es entstehen also irreguläre Hyperbeln und Lemniscaten von der Ordnung $\frac{n}{m}$ oder $\frac{m}{m}$, je nachdem n grösser oder kleiner als m ist. Die Wurzelpunkte, die wiederum Ausgangspunkte der Radii vectores sind (Einströmungs- und Ausströmungspunkte der Elektricität) stimmen mit denen des § 84 nicht überein. Wohl aber liegen die *Kreuzungspunkte an denselben Stellen wie vorher*, da die abbildende Function, also auch die Z-Ebene mit ihren Windungspunkten, unverändert geblieben ist. Auch die Beziehung 9) bleibt mit den entsprechenden Aenderungen erhalten.

Unter den Sätzen über die erhaltenen Curvenschaaren sind von charakteristischer Bedeutung wieder diejenigen, die folgenden Eigenschaften der Geraden, Kreise und logarithmischen Spiralen entsprechen: Die Gleichung $\Theta = \gamma$ einer Geraden bleibt unverändert, welchen ihrer Punkte man auch als Ausgangspunkte betrachtet. Die isogonalen Trajectorien einer Parallelenschaar sind wiederum eine Parallelenschaar, die des Strahlenbüschels sind logarithmische Spiralen, im Falle 90^0 concentrische Kreise. Jeder Kreis lässt sich für unendlich viele Punktpaare (die auf zwei concentrischen, unter sich reciproken Kreisen liegen) unverändert in der Form $\frac{p}{q} = c$

schreiben. Für die Endpunkte aller Sehnen gleicher Länge, also wieder für unendlich viele Punktpaare, lässt er sich unverändert schreiben $\varphi - \chi = \gamma$. Bei den logarithmischen Spiralen nehmen die Radii vectores geometrisch zu, wenn ihre Abweichungen sich arithmetisch ändern. Die isogonalen Trajectorien einer Schaar gleichwinkliger logarithmischer Spiralen sind wieder eine solche Schaar.

Wie diese Sätze und ausserdem die Sätze über Kreisbüschel, Kreisschaaren, logarithmische Doppelspiralen, Kreisreihen, Schliessungsprobleme, projectivische Strahlenbüschel und Punktreihen, isothermische Spiegelungen etc. aus der Z-Ebene in die z-Ebene zu übertragen sind, lehren die früheren Capitel. Dasselbe gilt von der Uebertragung beliebiger Isothermenschaaren der Z-Ebene und von der Uebersetzung beliebiger physikalischer und kinematischer Probleme.

Die Uebertragung aller Verhältnisse der Z-Ebene in die z-Ebene ist also möglich, sobald man die Zerlegung der Function $Z = f(z)$ in ihre Factoren durchgeführt hat.

Die umgekehrte Aufgabe ist zwar Punkt für Punkt *constructiv* stets möglich, da zu jedem z das zugehörige Z mit elementaren Hilfsmitteln construirt werden kann — was bei der vorigen Aufgabe nur in Specialfällen geschehen konnte —, die Sätze lassen aber nur höchst complicirte Deutungen zu und sind auch von geringerem Interesse, da bei der Abbildung $z = \psi(Z)$ die bequemen Factorenzerlegungen wegfallen. Das Allgemeine findet man in Capitel V.

§ 86. Die zugehörigen Riemann'schen Flächen.

Den Aufbau der zu einer gebrochenen rationalen Function gehörigen Riemann'schen Fläche kann man in ähnlicher Weise Schritt für Schritt durchführen, wie im vorigen Capitel. Ist z. B.

$$Z = f(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} = \frac{z-\gamma_1}{z-c_1} \cdot \frac{z-\gamma_2}{z-c^2} \cdots \frac{z-\gamma_m}{z-c_m} \cdot (z-\gamma_{m+1}) \cdots (z-\gamma_n),$$

d. h. *ist der Zähler von höherem Grade als der Nenner und sind gleiche Wurzeln nicht vorhanden*, so erledigt sich das Problem folgendermassen: Der erste gebrochene Factor $\frac{z-\gamma_1}{z-c_1}$ giebt eine ζ_1-Ebene, die zur z-Ebene in Kreisverwandtschaft steht, so dass den concentrischen Kreisen um den Nullpunkt der letzteren eine Kreisschaar entspricht, welche die ζ_1-Ebene stetig erfüllt. Dasselbe gilt von den $(m-1)$ übrigen Ebenen $\zeta_\varkappa$. Wanderung auf einem Kreise

der Ebene ζ_1, der den Nullpunkt umschliesst, entspricht Wanderung auf einem Kreise der ζ_2-Ebene, der den Nullpunkt entweder umschliesst oder nicht umschliesst. Beides kann man erreichen. Die Multiplication der entsprechenden Punkte (resp. Strecken) der beiden Ebenen giebt also einen doppelten oder einen einfachen Umgang, so dass eine Doppelebene entsteht, wie dies in Capitel X gezeigt war. Multiplication der m gebrochenen Factoren giebt folglich eine m-fache Ebene. Mit den nicht gebrochenen Factoren geschieht dasselbe, wie im vorigen Capitel, so dass die Z-Ebene schliesslich n Blätter, die sich ins Unendliche erstrecken, stetig erfüllt. *Die Function nimmt also jeden denkbaren Werth im Allgemeinen n mal an.* Die Lehrbücher der Functionentheorie beweisen diesen Satz in strengerer Weise.

Es fragt sich nun, wo die Verzweigungspunkte der Z-Ebene liegen. Zunächst ergab sich in § 83, dass bei $n > m$ der unendliche Punkt der Z-Ebene ein Windungspunkt $(n - m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, da dort $(n - m)$ Blätter zusammenhängen. Da dort die Conformität gestört sein muss, muss auch der Differentialquotient

$$Z' = \frac{\varphi_1 \varphi' - \varphi \varphi'_1}{\varphi_1^2},$$

von dem wir annehmen wollen, dass er sich nicht durch Wegheben von Factoren vereinfacht, an der Stelle $z = \infty$ entweder 0 oder ∞ werden. Offenbar findet das letztere statt, denn für $z = \infty$ wird φ_1 unendlich gross m^{ter}, φ'_1 $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, φ unendlich gross n^{ter}, φ' $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Der Zähler also ist von der Ordnung $m + n - 1$, der Nenner von der Ordnung $2m$, Z' wird also ∞ von der Ordnung $m + n - 1 - 2m = n - m - 1$. Daraus, dass im Punkte ∞ der Z-Ebene $n - m$ Blätter zusammenhängen, folgt nun nach der Theorie der Windungspunkte, dass einer beliebigen Geraden der Z-Ebene, welche unter bestimmter Neigung von einem Punkte $a + bi$ nach ∞ geht, in der z-Ebene eine Hyperbel $\frac{n}{m}^{\text{ter}}$ Ordnung entspricht, welche $n - m$ Asymptoten besitzt, die unter dem Winkel $\frac{2\pi}{n-m}$ aufeinander folgen. Die Rückwärtsverlängerung der Geraden giebt ebensoviele Asymptoten, so dass die gesammte Curve $2(n - m)$ derselben besitzt, die sich unter dem Winkel $\frac{\pi}{n-m}$ folgen.

Abgesehen von den eben besprochenen Verhältnissen wird Z' noch unendlich gross für die Wurzelpunkte von φ_1, d. h. für die m Punkte $a_x + b_x i$ der z-Ebene, deren entsprechende Punkte in die unendlichen Bereiche der getrennt verlaufenden Blätter der Z-Ebene fallen. Dies giebt also keine Windungspunkte. Die Win-

kelverhältnisse werden nicht gestört und die Singularität beschränkt sich darauf, dass unendliche Vergrösserung stattfindet. Jeder der übrigen Arme der besprochenen Hyperbel passirt also ohne Singularität einen der genannten Punkte.

Der Rest der Verzweigungspunkte liegt da, wo $Z' = 0$ ist, was nach unseren Annahmen nur noch für $\varphi_1 \varphi' - \varphi \varphi'_1 = 0$ d. h. im Allgemeinen an $m + n - 1$ Stellen geschehen kann, die als $V_1, V_2, \ldots V_{m+n-1}$ in beiden Ebenen bezeichnet werden mögen. Man hat also im Endlichen $m + n - 1$ Verzweigungspunkte 1ter Ordnung (von denen in Specialfällen beliebig viele gruppenweise zusammenfallen können). Die entsprechenden Kreuzungspunkte der z-Ebene sind also im Allgemeinen solche, bei denen Halbirung der Winkel eintritt.

Zählt man den unendlichen Verzweigungspunkt $n - m - 1^{ter}$ Ordnung mit in Form von $n - m - 1$ einzelnen 1ter Ordnung, und addirt man die endlichen $m + n - 1$ Punkte dazu, so ergeben sich im Ganzen $2n - 2$ Verzweigungspunkte, also eine gerade Zahl.

Die Verzweigungsschnitte, längs deren sich je zwei Blätter durchkreuzen, könnten nun so angelegt werden, dass man zunächst den unendlichen Verzweigungspunkt, in dem $n - m - 1$ Schnitte sich treffen müssen, um ihn zu einem solchen $(n - m - 1)^{ter}$ Ordnung zu machen, mit $n - m - 1$ endlichen Verzweigungspunkten verbindet. Der Rest von $2m$ Verzweigungspunkten wäre dann zu zweien mit einander zu verbinden. Im Ganzen hätte man dann $n - 1$ Schnitte, d. h. einen weniger, als die Anzahl der Blätter beträgt. Am bequemsten wird man die Schnitte geradlinig legen, so dass ihnen Theile der irregulären Hyperbeln entsprechen, die in § 84 und 85 zur Sprache kamen, jedoch müssen Collisionen vermieden werden.

Ob diese Anordnung jedesmal gestattet, den Charakter der Function klar wiederzugeben, oder ob es zweckentsprechender erscheint, bisweilen je zwei der im Unendlichen liegenden Verzweigungspunkte durch einen die ganze Ebene durchlaufenden Schnitt zu vereinigen, das bleibe in dieser Einführung dahingestellt. Sollte übrigens ein Zusammentreffen zweier Schnitte in demselben Blatte unvermeidlich sein, so hat man durch geeignete Anordnung dafür zu sorgen, dass der Charakter des Schnittpunktes nicht geändert wird, dass z. B. wenn er kein Windungspunkt war, ein einfacher Umgang um ihn auch jetzt noch in das ursprüngliche Blatt zurückführt. Man vergleiche hierzu das Beispiel in § 87. Ueber die einzelnen Specialfälle entscheidet die Methode des § 40.

Bei dem Verbinden zweier endlichen Punkte durch einen Schnitt ist es übrigens gestattet, den Schnitt, wie es in dem Bei-

spiele des Capitel VIII geschah, von dem einen Punkte aus ins Unendliche und von dort aus nach dem andern hinzuführen, so dass man *scheinbar* zwei Schnitte hat. Nur muss dann, wenn der unendliche Bereich Verzweigungspunkte enthielt, Vorsicht angewendet werden.

Ist $n = m + 1$, so entspricht der unendliche Punkt der z-Ebene einem Windungspunkt 0ter Ordnung, d. h. es ist im Unendlichen kein Verzweigungspunkt vorhanden, vorausgesetzt, dass der Nenner der Function nur ungleiche Factoren enthält. Diesen Voraussetzungen entsprach z. B. die in Cap. VIII behandelte Function

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Daher hatten dort die Asymptoten der den Strahlenbüscheln der Z-Ebene entsprechenden Curven denselben Verlauf, wie die Linien des Büschels selbst.

Hat aber der Nenner gruppenweise gleiche Wurzeln, so finden sich auch im letzterwähnten Falle $[m + 1 = n]$ im unendlichen Bereiche Windungspunkte verschiedener Ordnung ein, so dass in den entsprechenden Punkten $a_x + b_x i$ der z-Ebene die schon besprochenen Winkelreductionen stattfinden. Das Vorkommen gleicher Wurzeln im Zähler wird ähnlich erledigt.

Uebertrifft n die Zahl m um mehr als 1, so gilt von den Asymptoten der den Strahlenbüscheln der Z-Ebene entsprechenden Curven Aehnliches. Aus der Zahl der Asymptoten ergiebt sich von selbst, was in § 84 unter c) über den ins Unendliche abfliessenden Theil der Elektricität gesagt war.

Im Ganzen ergiebt sich also für die Hyperbeln $\frac{n}{m}^{ter}$ Ordnung für $n > m$ Folgendes:

Die von einem Punkte der Z-Ebene ausgehenden Strahlen geben im Allgemeinen in der z-Ebene je n Hyperbelarme, die von den n entsprechenden Punkten ausgehen. Von ihnen gehen m nach den Punkten $a_x + b_x i$, der Rest asymptotisch ins Unendliche. Das Passiren der Kreuzungspunkte bringt die mehrfach besprochenen Winkelreductionen hervor, die Anzahl der ins Unendliche gehenden Arme wird aber dadurch nicht geändert.

Der Verlauf der „Spannungscurven" ist im Allgemeinen folgender: Sie umgeben zunächst als kleine Kreise die n Einströmungspunkte, spitzen sich nach den endlichen Kreuzungspunkten als Ovale zu und treffen sich dort zu zweien unter Kreuzungen von 90^0. Beim weiteren Anwachsen können dort ähnlich, wie es in § 62 kinematisch geschildert wurde, Vertauschungen der Rollen der ein-

zelnen Curvenarme eintreten. Dies bringt m geschlossene Curven hervor, die allmählich zu kleinen Kreisen zusammenschwinden, welche die endlichen Ableitungspunkte umgeben. Sämmtliche endlichen Ableitungs- und Einströmungspunkte umgiebt endlich noch eine geschlossene Curve, welche, ins Unendliche anschwellend, sich mehr und mehr einem Kreise nähert. Durch Figur 40 lässt sich das Ganze am besten erläutern.

Der zweite Fall, *wo der Zähler von niederem Grade ist, als der Nenner*, also z. B.

$$Z_1 = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)},$$

wo φ und φ_1 dieselbe Bedeutung haben, wie vorher, kann ebenso behandelt werden, wie der vorige. Er erledigt sich aber schneller durch die Betrachtung der Abbildung

$$Z_1 = \frac{1}{Z}.$$

Der Nullpunkt und der unendliche Punkt vertauschen ihre Rollen, so dass der erstere ein Windungspunkt $(n - m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung wird, während im letzteren die sämmtlichen Blätter getrennt verlaufen, sobald vorher der Nullpunkt nicht zu den endlichen Windungspunkten gehörte. In der That wird Z_1 gleich unendlich für die n im allgemeinen getrennten Punkte $a_\varkappa + b_\varkappa i$, für $z = \infty$ aber ist Z_1 gleich Null von der $(n - m)^{\text{ten}}$ Ordnung. Nur solche Geraden, die den Nullpunkt der Z-Ebene passiren, geben solche Hyperbeln $\frac{n}{m}^{\text{ter}}$ Ordnung in der z-Ebene, welche $n - m$ Asymptoten haben; alle andern verlaufen im Endlichen. Die endlichen Kreuzungspunkte der z-Ebene bleiben dieselben, wie vorher, wie sofort aus der Gleichung

$$Z' = \frac{\varphi\varphi'_1 - \varphi_1\varphi'}{\varphi^2}$$

hervorgeht. Sonst ist Wesentliches nicht zu bemerken, und die weitere Entwickelung kann dem Leser überlassen bleiben.

Machen Untersuchungen über den unendlichen Punkt der Z-Ebene bei einer gebrochenen Function Schwierigkeit, so ist es oft zweckmässig, die reciproke Function zu betrachten und den Nullpunkt derselben zu untersuchen. Das Verhalten der Blätter wird durch diese Inversion nicht wesentlich geändert.

Es bleibt der dritte Fall übrig, in dem Zähler und Nenner beide vom n^{ten} Grade sind. Dass Z dann nur für die n Werthe $\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa i$ verschwindet, ist bereits gezeigt, ebenso, dass es nur für die n Werthe $a_\varkappa + b_\varkappa i$ unendlich gross wird. Weder der Null-

punkt, noch der unendliche Bereich der Z-Ebene enthalten daher im Allgemeinen Verzweigungspunkte. Es fragt sich, ob dem unendlichen Bereiche der z-Ebene ein Verzweigungspunkt entspricht. Dies ist nicht der Fall. Für $z = \infty$ ist $Z = 1$, und zwar gleich dem Punkte 1 in einem einzigen der Blätter. Man erkennt dies sofort an der Untersuchung der Gleichung

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} - 1 = \frac{\varphi(z) - \varphi_1(z)}{\varphi_1(z)} = 0.$$

Dieselbe wird erfüllt für $z = \infty$, ausserdem für die $n - 1$ im allgemeinen getrennten Punkte der Gleichung $n - 1^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(z) - \varphi_1(z) = 0$, deren Glied z^n sich weghebt. Also entspricht der Punkt 1 der Z-Ebene im Allgemeinen n getrennten Punkten der z-Ebene. Er ist *kein* Verzweigungspunkt, obwohl der Differentialquotient

$$Z' = \frac{\varphi_1(z)\varphi'(z) - \varphi(z)\varphi'_1(z)}{\varphi_1(z)^2}$$

für $z = \infty$ verschwindet, da der Nenner vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, der Zähler, in dem sich das Glied $nz^{n-1} \cdot z^n$ weghebt, nur vom $2n - 2^{\text{ten}}$ Grade ist. Aus letzterer Bemerkung folgt zugleich, dass der Differentialquotient nur für $2n - 2$ endliche Werthe verschwinden kann, so dass, wie vorher, im Allgemeinen $2n - 2$ Verzweigungspunkte 1ter Ordnung vorhanden sind, die aber im vorliegenden Falle sämmtlich, ebenso wie die Kreuzungspunkte der z-Ebene, im *Endlichen* liegen. Im Punkte $Z = 1$ beschränkt sich die Singularität auf die unendlichfache Verkleinerung, während Winkeländerungen nicht vorkommen. Von den zu einem Strahlenbüschel der Z-Ebene gehörigen Hyperbeln $\frac{n}{n}^{\text{ter}}$ Ordnung hat demnach stets nur *eine* eine Asymptote. Nur die dem Büschel durch $Z = 1$ entsprechenden haben sämmtlich Asymptoten.

Damit kann die Angelegenheit der mit den gebrochenen rationalen Functionen zusammenhängenden Riemann'schen Flächen für unsere Absichten als erledigt betrachtet werden. Der Leser wird bereits jetzt im Stande sein, die Bemerkungen des § 40 nach verschiedenen Richtungen hin zu präcisiren und zu intensiveren Studien auf diesem Gebiete überzugehen.

Es werde noch darauf aufmerksam gemacht, dass die Zerlegbarkeit der gebrochenen rationalen Functionen in Partialbrüche eine ganz andere Behandlungsweise des besprochenen Gegenstandes gestattet, die zu denselben Resultaten führt.

§ 87. Beispiele zu Capitel XI.

In Capitel VIII wurde das Beispiel $Z = \frac{1}{2}\frac{z^2+1}{z}$ vollständig durchgeführt. An ihm bestätigen sich die Bemerkungen über den Fall $n = m + 1$.

Nach Analogie von Capitel IX lässt sich das Beispiel

$$Z = \frac{z^n - c}{z^m - c_1}$$

vollständig durchführen. Man gelangt auf Curven von den Gleichungen

$$\frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_m} = c,$$

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n) - (\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_m) = \gamma,$$

bei denen *die Ausgangspunkte der Radii vectores auf concentrischen regelmässigen Polygonen verschiedener Seitenzahl mit dem Nullpunkte als Centrum liegen.* Bei der elektrodynamischen Deutung ist zu beachten, dass, wenn $n - m$ positiv ist, $n - m$ Ausströmungspunkte im Unendlichen anzunehmen sind, während, wenn es negativ ist, ebensoviele Einströmungspunkte dorthin verlegt werden müssen.

Im Falle $n = m$ hat man die regulären Hyperbeln und Lemniscaten des § 73 und 74.

Einige Beispiele des § 81 und 82 gehören gleichfalls hierher.

Im Uebrigen ist dem Verfasser nur noch ein einziges ziemlich vollständig durchgeführtes Beispiel der Abbildung mittels gebrochener rationaler Function bekannt geworden.

Amstein behandelt in dem Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. XV 78 die Function

$$Z = \frac{1}{4}\left(3z + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{z^4 + \frac{1}{3}}{z^3}.$$

Er untersucht die Curven, welche den Kreisen und Geraden um resp. durch den Nullpunkt jeder der beiden Ebenen in der andern entsprechen. Die Curven, welche zu den Geraden durch den Nullpunkt der Z-Ebene in der z-Ebene gehören, werden durch Zeichnung dargestellt und auch rechnend behandelt. Dass sie aber der Gleichung

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 - 3\chi = \gamma,$$

dass ferner ihre Orthogonalen der Gleichung

$$\frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{q^3} = c$$

genügen, woraus die Eigenschaften beider Curvensysteme sich mit einem Schlage ergeben, wird dort nicht bemerkt.

Mehr Werth legt die Abhandlung auf die umgekehrte Aufgabe, die auf Curvensysteme führt, welche 4 Blätter der Z-Ebene erfüllen, ohne sich zu decken. Die verworrene Zeichnung wird sehr instructiv aufgelöst, indem die vier Blätter auch einzeln gezeichnet werden. Auf realisirbare physikalische Deutungen führt nur das *einzige getrennt im Unendlichen verlaufende Blatt der Z-Ebene.**) Es giebt dasselbe den Verlauf der Spannungs- und Strömungslinien für den Fall an, *dass die Curve*

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = 1$$

zur Einströmungselektrode gemacht wird, während die Elektricität im Unendlichen abgeleitet wird.

Nur einige Hauptpunkte sollen hier als besonders instructiv wiedergegeben und die nöthigen Ergänzungen zur Abhandlung beigefügt werden.

Z wird Null für die Werthe

$$s = \sqrt[4]{-\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{180 + 2\varkappa\pi}{4} + i\sin\frac{180 + 2\varkappa\pi}{4}\right].$$

Dies giebt elektrodynamisch gedeutet 4 Einströmungspunkte der Elektricität auf dem Kreise mit Radius $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ an den Stellen $\pm 45^0$ und $\pm 135^0$.

Unendlich gross 1ter Ordnung wird Z für $s = \infty$, unendlich gross 3ter Ordnung, d. h. dreimal unendlich gross 1ter Ordnung, für $z = 0$. Dem einzigen Null-Punkte der s-Ebene entsprechen also zugleich die unendlichen Punkte von drei Blättern der Z-Ebene, d. h. drei der Blätter hängen dort durch einen Windungspunkt 2ter Ordnung zusammen, während das vierte Blatt getrennt verläuft. Dreiviertel der einströmenden Elektricität gehen also nach dem Nullpunkte der s-Ebene, während der Rest ins Unendliche abfliesst.

Im Ganzen sind 5 singuläre Punkte vorhanden, denn der Differentialquotient

$$Z' = \frac{3}{4} \cdot \frac{s^4 - 1}{s^4}$$

wird unendlich gross für $s = 0$, den Kreuzungspunkt 2ter Ordnung der s-Ebene, er verschwindet für die vier Werthe $s = \sqrt[4]{1}$, d. h. für die Punkte ± 1 und $\pm i$. Diese geben, da der zweite

*) Hierin liegt ein Wink für zahlreiche andere physikalisch realisirbare Beispiele.

Differentialquotient an dieser Stelle nicht verschwindet, die 4 endlichen Verzweigungspunkte 1ter Ordnung der Z-Ebene und die entsprechenden Kreuzungspunkte der z-Ebene.

Amstein untersucht dies eingehender nach Analogie des § 40, indem er die Reihenentwickelungen für die fraglichen Punkte angiebt. Er findet nach dem Maclaurin'schen Satze:

$$\zeta - 1 = \frac{3}{2}(z-1)^2\left[1 - \frac{5}{3}(z-1) + \frac{5}{2}(z-1)^2 + \cdots\right],$$

$$\zeta + 1 = -\frac{3}{2}(z+1)^2\left[1 - \frac{5}{3}(z+1) + \frac{5}{2}(z+1)^2 + \cdots\right],$$

$$\zeta - i = -\frac{3}{2}(z-i)^2\left[1 - \frac{5}{3}(z-i) - \frac{5}{2}(z-i)^2 + \cdots\right],$$

$$\zeta + i = \frac{3}{2}(z+i)^2\left[1 + \frac{5}{3}(z+i) - \frac{5}{2}(z+i)^2 + \cdots\right],$$

Man braucht sich nur mit Annahme von Werthen, die sehr nahe an ± 1 oder $\pm i$ liegen, auf das 1te Glied dieser Reihen zu beschränken, um zu sehen, dass in der That Windungspunkte 1ter Ordnung vorhanden sind.

Für $z = 0$ hat man von selbst $Z = \frac{1}{4z^3}[1 + 3z^4]$, so dass man für die Nachbarschaft von z annähernd die Abbildung $Z = \frac{1}{4z^3}$ erhält, die den Windungspunkt 2ter Ordnung $Z = \infty$ ergiebt.

Um den Verlauf der wichtigsten Linien zu überblicken, müssen wir nicht nur untersuchen, wo die Verzweigungspunkte der Z-Ebene liegen, die man erhält, wenn man $z = \pm 1$ und $z = \pm i$ in die Function

$$Z = \frac{3}{4} \cdot \frac{z^4 + \frac{1}{3}}{z^3}$$

einführt, wodurch man die Punkte V_1, V_2, V_3, $V_4 = +1$, -1, $+i$ und $-i$ erhält, sondern man muss noch untersuchen, welchen Punkten der z-Ebene jede dieser Stellen der Z-Ebene sonst noch entspricht. Man setze zu diesem Zwecke z. B. $Z = 1$, d. h.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{z^4 + \frac{1}{3}}{z^3} = 1,$$

löse also die Gleichung 4ten Grades

$$z^4 - \frac{4}{3}z^3 + \frac{1}{3} = 0$$

auf. Da wir schon zwei gleiche Wurzeln $z = +1$ kennen, lässt sich die linke Seite der Gleichung durch $(z-1)^2$ ohne Rest divi-

diren, so dass nur noch eine Gleichung 2ten Grades aufzulösen bleibt. Aehnlich ists bei -1 und $\pm i$. So findet man die von Amstein angegebene Tabelle

$$Z = \quad 1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad \infty.$$

$$\zeta = \begin{cases} 1, & -1, & i, & -i, & \infty. \\ 1, & -1, & i, & -i, & \infty. \\ 1, & -1, & i, & -i, & 0. \\ \frac{-1+i\sqrt{2}}{3}, & \frac{1-i\sqrt{2}}{3}, & \frac{-i+\sqrt{2}}{3}, & \frac{i-\sqrt{2}}{3}, & 0. \\ \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}, & \frac{1+i\sqrt{2}}{3}, & \frac{-i-\sqrt{2}}{3}, & \frac{i+\sqrt{2}}{3}, & 0. \end{cases}$$

Nach § 86 handelt es sich um den Fall $n = m + 1$. Der unendliche Punkt der ζ-Ebene ist kein Kreuzungspunkt, die den Strahlenbüscheln der Z-Ebene entsprechenden Curven verlaufen also asymptotisch genau ebenso, wie das Strahlenbüschel. Dem Strahle z. B., der in der Z-Ebene von 0 nach ∞ geht, und einen der Verzweigungspunkte, z. B. $+1$ passirt, entsprechen in der Z-Ebene folgende Linienzüge. Von dem Einströmungspunkte A_I geht ein Bogen nach dem Kreuzungspunkte $+1$, spaltet sich dort in zwei der reellen Axe folgende Gerade, von denen die eine nach ∞, die andere nach 0 geht. Im letztern Punkte trifft sie unter Winkeln von 120^0 mit den beiden Armen zusammen, die von A_{II} und A_{III} ausgehen. Von A_{IV} geht ein Arm nach dem Kreuzungspunkte $+1$, der sich dort so spaltet, dass seine Arme ebenfalls mit der positiv reellen Axe zusammenfallen. So erkennt man, dass drei Quantitäten Elektricität nach Null gelangen, nur eine nach dem unendlichen Bereiche geht.

Aehnliches geschieht mit den andern Hauptaxen der Z-Ebene, die gleichfalls Verzweigungspunkte passiren.

In Figur 53 ist nach Amstein das Liniensystem skizzirt, welches der Quadranteneintheilung der Z-Ebene entspricht. Da letztere vier Blätter besitzt, so entstehen in der ζ-Ebene 16 Flächenräume. Im Nullpunkte werden die Winkel 90^0 auf 30^0 reducirt. E_1, E_2, E_3, E_4 sind die Einströmungspunkte, die entsprechenden Buchstaben beider Figuren erläutern das Uebrige.

In Figur 54 ist die Zeichnung vervollständigt. Man verfolge kinematisch die Bewegungserscheinung der ζ-Ebene, welche dem Anschwellen eines Kreises um den Nullpunkt der Z-Ebene entspricht, um zu sehen, wie die Ovale sich nach den Kreuzungspunkten hin zuspitzen, dort rechtwinklig zusammenstossen, sich gewissermassen spalten und die losgelösten Theile zu zwei geschlossenen Curven sich vereinigen lassen, von denen die eine anschwel-

lend zum unendlich grossen Kreise wird, während die andere zusammenschwindend als kleiner Kreis dem Nullpunkte zustrebt.

Der schattirte Theil der Figur kann ausgeschnitten werden, ohne dass der stationäre Zustand sich irgendwie ändert.

[Hätte man im Nullpunkte nicht 3, sondern 2 Ausströmungspunkte, ebensoviele im Unendlichen, so würde man die Curvensysteme

$$\frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{q^2} = c$$

und

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 - 2\chi = \gamma$$

erhalten, zu denen ein Kreis gehört, der ausgeschnitten werden darf. Die Figur könnte leicht mit der hier auftretenden verwechselt werden. Vergl. die Inauguraldissertation von Hildebrandt, Fig. 14.]

Die Gleichungen der Curven, die dem Strahlenbüschel durch den Nullpunkt der Z-Ebene entsprechen, leitet Amstein nur in Polarcoordinaten ab, aus denen sich die Fundamentaleigenschaft nicht ohne Weiteres absehen lässt. Aus

$$Z = \frac{1}{4}\left(3z + \frac{1}{z^3}\right)$$

oder $X + Yi = \frac{1}{4}\left[3r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r^3}(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)\right]$

folgt zunächst

1) $$X = \frac{1}{4}\left[3r\cos\varphi + \frac{1}{r^3}\cos 3\varphi\right],$$

2) $$Y = \frac{1}{4}\left[3r\sin\varphi - \frac{1}{r^3}\sin 3\varphi\right].$$

Die rechten Seiten, gleich Constanten gesetzt, geben die Isothermenschaaren, die den fundamentalen Parallelenschaaren der Z-Ebene entsprechen. Ihre Gleichung genügt mit der linken Seite der Gleichung $\Delta u = 0$, sobald man Cartesische Coordinaten einführt.

Man findet mit Hülfe von 1) und 2) sofort die Curvengleichung, in welche $f(XY) = 0$ durch unsere Abbildung übergeht. Der Strahl $\frac{Y}{X} = \tan\gamma$ z. B. geht über in

3) $$\frac{3r^4\sin\varphi - \sin 3\varphi}{3r^4\cos\varphi + \cos 3\varphi} = \tan\gamma.$$

Der Kreis $X^2 + Y^2 = c^2$ geht über in

4) $$\frac{1}{16}\left[9r^2 + \frac{1}{r^6} + \frac{6}{r^2}\cos 4\varphi\right] = c^2.$$

Die Fundamentaleigenschaften der Curvengruppen 3) und 4) liegen aber nach unseren allgemeinen Darlegungen in den Gleichungen

3*) $$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 - 3\chi = \gamma,$$

4*) $$\frac{3}{4}\frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{q^3} = c,$$

wo der Factor $\frac{3}{4}$ aus der Form $Z = \frac{3}{4}\frac{z^4 + \frac{1}{3}}{z^3}$ der abbildenden Function stammt.

Auch die Gleichungen der Curvenschaaren, die beliebigen Strahlenbüscheln der Z-Ebene nebst ihren Kreisschaaren entsprechen, haben im Wesentlichen die Form 3) und 4). Man findet sie durch die Gleichung

$$Z - (a + bi) = \frac{3}{4}\frac{z^4 + \frac{1}{3}}{z^3} - (a + bi) = \frac{3z^4 - 4(a + bi)z^3 + \frac{1}{3}}{4z^3},$$

zu welcher die conjugirte Gleichung zu bilden und in der früheren Weise weiter zu behandeln ist. Nach dieser Richtung lässt sich also die Amstein'sche Abhandlung bis zur vollständigen Uebertragung der Geometrie der Z-Ebene weiterführen.

Das interessanteste Resultat der besprochenen Abhandlung ergiebt sich auf folgendem Wege. Um die Curve der Z-Ebene zu finden, die dem Einheitskreise der z-Ebene entspricht, setze man in den Gleichungen 1) und 2) $r = 1$. Man erhält

$$X = \frac{1}{4}\left[3\cos\varphi + \cos 3\varphi\right] = \cos^3\varphi,$$

$$Y = \frac{1}{4}\left[3\sin\varphi - \sin 3\varphi\right] = \sin^3\varphi,$$

also $X^{\frac{2}{3}} = \cos^2\varphi$, $Y^{\frac{2}{3}} = \sin^2\varphi$, endlich durch Addition:

5) $$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Dies ist die Gleichung der *Astroide*, d. h. der Curve, die man als Enveloppe der Geraden gleicher Länge, die sich in ein orthogonales Axenkreuz einzeichnen lassen, aus der Analysis kennt. Vergl. Figur 55.

Die Natur der Curven, die den übrigen Kreisen $r = c$ um den Nullpunkt der z-Ebene entsprechen, klärt Amstein unter Vermeidung der Elimination von φ folgendermassen auf: Ist r_1 der Radius des Grundkreises einer verallgemeinerten Hypocycloide, ϱ der Radius des rollenden Kreises, p der Radius des ergänzenden Punktes, so erhält man ihre Gleichung durch Elimination der unabhängigen Variabelen φ aus den Gleichungen

6) $$X = (r_1 - \varrho)\cos\left(\frac{\varrho}{r_1}\varphi\right) + p\,.\cos\left(\frac{r_1-\varrho}{r_1}\varphi\right),$$

7) $$Y = (r_1 - \varrho)\sin\left(\frac{\varrho}{r_1}\varphi\right) - p\,.\sin\left(\frac{r_1-\varrho}{r_1}\varphi\right),$$

die man in der Regel als Gleichungen der Hypocycloide bezeichnet, indem man auf die Elimination verzichtet. Setzt man nun hier

$$r_1 = r, \quad \varrho = \frac{r}{4}, \quad p = \frac{1}{4r^3},$$

so geht 6) resp. 7) über in:

8) $$X = \frac{1}{4}\left[3r\cos\frac{\varphi}{4} + \frac{1}{r^3}\cos\frac{3\varphi}{4}\right],$$

9) $$Y = \frac{1}{4}\left[3r\sin\frac{\varphi}{4} - \frac{1}{r^3}\sin\frac{3\varphi}{4}\right].$$

Dies stimmt, mit Ausnahme des Factors $\frac{1}{4}$ der independenten Variabelen φ, was ganz unwesentlich ist, mit Gleichung 1) und 2) überein. Folglich:

*Den Kreisen $r = c$ um den Nullpunkt der z-Ebene entsprechen Hypocycloiden mit dem Grundkreise $r = c$, dem wälzenden Kreise $\varrho = \frac{c}{4}$ und dem erzeugenden Radius $p = \frac{1}{4c^3}$.**) Die Astroide ist demnach die Hypocycloide mit $r = 1$, $\varrho = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{4}$.

Die Figur 55 stellt nur die hierher gehörigen Hypocycloiden dar, für welche $r > 1$ ist. Sie befinden sich in dem einzigen, getrennt im Unendlichen verlaufenden Blatte, sind also die Spannungscurven für den Fall, dass die Astroide Einströmungselektrode ist, während die Ableitung im Unendlichen geschieht. [Auch hier ist eine Figur von Amstein benutzt.]

Die Gleichungen der ebenfalls gezeichneten Orthogonalcurven würde man erhalten, wenn man r eliminirt und dann $\varphi = \gamma$ setzt.

Die punktirte Curve in Figur 55 ist diejenige, welche Amstein als rosace (Rosette) bezeichnet. Sie entspricht $r = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Setzt man diesen Werth in 1) und 2) ein, so ergiebt sich

$$X = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}}(\cos\varphi + \cos 3\varphi) = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}\cos 2\varphi\cos\varphi,$$

$$Y = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}}(\sin\varphi + \sin 3\varphi) = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}\cos 2\varphi\sin\varphi.$$

Quadrirung und Addition giebt

*) Auch bei zahlreichen andern Abbildungen mittels gebrochener rationaler Function treten Hypocycloiden auf.

$$R^2 = \frac{9}{4\sqrt[4]{9}} \cos^2 2\varphi,$$

oder

$$R = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} \cos 2\varphi$$

als Gleichung dieser Curve. Alles Uebrige macht 4 Blätter zur Zeichnung nöthig.

Die Festlegung der Verzweigungsschnitte ist nicht ganz leicht. Amstein gelangt folgendermassen zum Ziele: Das 1te und 2te Blatt durchkreuzen sich längs der Geraden von $+1$ nach -1 und von $+i$ nach $-i$; das 2te und 3te längs der Geraden von den Neigungen $\pm 45^0$ und $\pm 135^0$ durch den Nullpunkt; das 3te und 4te längs der reellen und imaginären Axe. Jedes Linienpaar ist also als ein einziger Schnitt aufzufassen, so dass allerdings eine Kreuzung stattfindet, wobei jedoch die früher angedeuteten Bedingungen erfüllt bleiben. —

Die vollständige Durchführung weiterer instructiver Beispiele würde immerhin verdienstlich sein. Nur durch solche Arbeiten wird die Theorie der Riemann'schen Flächen, in der noch mancherlei zu klären ist, zur vollen Abrundung gelangen.

§ 88. Litteratur und Bemerkungen.

Mit dem vorstehenden Capitel ist die Theorie der stationären elektrischen Strömung in einer unbegrenzten Platte bis dahin erledigt, dass es sich um beliebig viele Ein- und Ausströmungspunkte handeln darf, mögen sie im Endlichen oder im Unendlichen liegen. Nur müssen die Quantitäten der Elektricität, welche die Elektroden passiren, in *rationalem* Verhältniss stehen.

Wärmetheoretisch war es derselbe Gegenstand, der Lamé in den „Leçons sur les coordonnées curvilignes" von Cap. XI bis XIV beschäftigte.

Andeutungen über die Resultate des Capitel XI gab der Verfasser im Programm 1880 der Königl. Gewerbeschule zu Hagen. Die Arbeiten von Hildebrandt, die experimentellen Resultate von Guébhard, die Arbeiten von Darboux, Lucas und Haton de la Goupillière sind bereits früher citirt.

Die in § 47 genannten Lehrbücher beschäftigen sich sämmtlich mehr oder weniger mit den gebrochenen rationalen Functionen, ebenso das während des Druckes erschienene Werk von F. Klein: „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale." Die Lectüre dieser empfehlenswerthen Schrift kann

sich hier ohne Weiteres anschliessen. In ihr befinden sich weitere Litteraturnachweise. —

Ausser den punktförmigen Elektroden sind aber schon beiläufig eine Anzahl von Fällen, bei denen die Reduction auf Punkte nicht möglich ist, erledigt worden. Angenähert kann man die Gestalt der Spannungscurven und Stromlinien bei endlichen, beliebig geformten Elektroden schon jetzt ermitteln, indem man auf den Elektroden in gleichen Abständen Punkte markirt, durch die man die Elektricität ein- resp. ausströmen lässt. Je näher man sie aneinander rücken lässt, um so genauer wird das Resultat. Theilt man z. B. eine Gerade in n gleiche Theile, lässt man in den Theilpunkten Elektricität in gleichen Quantitäten einströmen, während sie im unendlichen Bereiche abgeleitet wird, so müssen die Spannungscurven, je grösser man n nimmt, und je weiter man sich von der Linie entfernt, um so mehr die Gestalt von Ellipsen annehmen, die ihre Brennpunkte auf den Endpunkten der Geraden haben, denn die Gerade gab als continuirliche Elektrode confocale Ellipsen als Spannungscurven (Capitel VIII).

Es sind also angenäherte Lösungen möglich, wie man sie auch auf andern Gebieten der Analysis durch Reihenbetrachtungen etc. erfolgreich durchführt.

Dass auch eine Reihe von Problemen gelöst sind, bei denen es sich um gemischte Elektroden handelt, d. h. solche, wo Punkte und Linien zugleich als Elektroden auftreten, braucht nur erwähnt zu werden. Man nehme z. B. eine unbegrenzte Gerade als Einströmungselektrode, einen kleinen Kreis (Punkt) als Ausströmungselektrode an. Die Spannungscurven werden nach Fig. 12 die Kreise der zugehörigen Schaar. Durch Abbildung dieses einen Problems mit Hilfe der besprochenen Functionen erhält man schon beliebig viele gemischte Probleme.

Der allgemeinere Fall, der *eine endliche Gerade und einen beliebigen Punkt* betrifft, erledigt sich nach Cap. VIII folgendermassen: Durch die Abbildung $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ kann man die Gerade in den Einheitskreis der z-Ebene verwandeln, wobei der beliebige Punkt wieder ein solcher wird. Für diesen und den Kreis als Elektroden sind aber Kreisbüschel und Kreisschaar die Strom- und Spannungscurven. Die entsprechenden der z-Ebene sind elementar zu construiren und sind nach Seite 162 die Reciproken eines Büschels cardioidischer Curven nebst Orthogonalschaar gegen einen gewissen Kreis.

Zwölftes Capitel.

Algebraische Functionen mit Irrationalitäten.

§ 89. Zusammenhang der Wurzeln und Windungspunkte.

Vieldeutigkeit kann bei algebraischen Functionen nur durch das Vorkommen von Wurzeln veranlasst werden, während bei den transscendenten Functionen die Periodicitätsverhältnisse massgebend sind. Der Mehrdeutigkeit entspricht die Anzahl der Blätter. Verschwindet eine der vorkommenden Wurzeln für einen bestimmten Werth des Arguments, so tritt in der Regel an dieser Stelle eine Reduction der Blätterzahl ein, d. h. es hängen dort Blätter zusammen, und zwar in einem Windungspunkte bestimmter Ordnung. Das Verschwinden muss aber mit der Aufhebung der Irrationalität zusammenhängen, nicht etwa mit dem Verschwinden des Factors einer Wurzel. So wird z. B. die Function

$$Z = (z - a)\sqrt{z}$$

für $z = a$ eindeutig, trotzdem befindet sich an der Stelle $z = a$ kein Windungspunkt. Dies ergiebt sich sofort aus folgender Anschauungsüberlegung: Die Function $Z = \sqrt{(z - a)(z - b)z}$ beansprucht für die z-Ebene zwei Blätter, die in den Punkten a, b, 0 und ∞ zusammenhängen. Man lege die Verzweigungsschnitte von a nach b und von 0 nach ∞, dann kann man die Punkte a und b so umwandern, dass kein Schnitt überschritten wird, dass man also im betreffenden Blatte bleibt. Macht man jetzt $b = a$, so hat man die vorige Function $Z = (z - a)\sqrt{z}$, und nichts hat sich geändert, als dass der Schnitt von a nach b verschwunden ist. Auch jetzt lässt uns der Umgang im fraglichen Blatt, ein Verzweigungspunkt ist also bei $z = a$ nicht vorhanden.

Wir haben bezüglich der Verzweigungspunkte nur einen Rückblick nöthig, da das Wesentliche schon zur Sprache gekommen ist, und zwar bei den Beispielen

$$Z = \sqrt[n]{z},\quad Z = \sqrt[m]{\frac{az^n + b}{cz^n + d}},\quad Z = \sqrt{1 - z^2},\quad Z = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

und bei den Umkehrungen der rationalen Functionen. Nach den bezüglichen Bemerkungen und denen des § 40 wird die Conformität in den Verzweigungspunkten gestört, jedoch nur insofern, als die besprochenen *gleichmässigen* Winkelreductionen stattfinden und die Vergrösserungsverhältnisse 0 oder ∞ werden.

Hat die Function n Blätter, so können dieselben gruppenweise an derselben Stelle zusammenhängen. Hängen z. B. von 6 Blättern

an derselben Stelle zusammen 1 und 2, ferner 3, 4 und 5, während das 6te einzeln bleibt, so wird ein wiederholter Umgang um die Stelle von Blatt 1 aus cyclisch durch die beiden Blätter 1 und 2 führen, nicht aber in die übrigen. Von Blatt 3 ausgehend wird man cyclisch durch die Blätter 3, 4 und 5 gelangen, während der Umgang um Blatt 6 uns in diesem lässt. Figur 56 stellt das Ineinanderübergehen der Blätter in der Nähe des Punktes schematisch dar.

An anderer Stelle der Ebene könnte aber ein anderer Zusammenhang stattfinden, es kann z. B. 1 mit 3, 2 mit 5 und 6 zusammenhängen, während 4 einzeln bleibt. Dann findet das Entsprechende statt, und der Zusammenhang ist durch Figur 57 veranschaulicht. Natürlich kann sich auch die Zahl der Gruppen ändern.

Mühelos lässt sich nachweisen, dass jedes willkürlich angenommene Uebergehen der Blätter sich auf cyclische Vertauschungen reduciren lässt. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf Abschnitt III der Functionentheorie von Durège, der die dem Leser bereits bekannten Dinge im Zusammenhange darstellt. Dort wird auch der Nachweis geliefert, dass man stets im Stande ist, *die Vieldeutigkeit der algebraischen Functionen in eine Eindeutigkeit des Ortes zu verwandeln.* Auch *Abschnitt VII* des genannten Lehrbuchs, „Ueber das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen" spricht sich unter B, „Functionen mit Verzweigungspunkten", über die betreffenden Verhältnisse sehr anschaulich aus.

§ 90. Die durchführbaren irrationalen Verwandtschaften.

In Capitel XI wurde gezeigt, inwiefern die rationalen Verwandtschaften und ihre Umkehrungen durchführbar sind. Das Verhalten beider Ebenen und ihre wesentlichen geometrischen Beziehungen liessen sich stets erörtern, besonders dann, wenn die Zerlegung der rationalen Function in Factoren möglich, oder die Function direct als Product solcher Factoren gegeben war.

Principiell durchführbar sind demnach bezüglich der Verwandtschaftstheorie alle Combinationen der rationalen Functionen und solcher irrationalen, deren Umkehrungen rationale Functionen sind.

Unter f und f_1 wollen wir stets rationale Functionen, unter φ und φ_1 die Umkehrungen solcher verstehen.

1) Es sei $f(Z) = f_1(z)$, dann ist $Z = \varphi[f_1(z)]$, $z = \varphi_1[f(Z)]$. Die gegenseitigen Beziehungen der Z- und der z-Ebene ergeben sich mit Hilfe einer ζ-Ebene, für welche $\zeta = f(Z)$ und $\zeta = f_1(z)$ ist. Damit sind die Beziehungen erledigt, die sich aus der Auflösung von Gleichungen folgender Form explicit ergeben:

$$\frac{A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + \cdots + A_1 Z + A_0}{B_m Z^m + B_{m-1} Z^{m-1} + \cdots + B_1 Z + B_0} = \frac{a_\nu z^\nu + a_{\nu-1} z^{\nu-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_\mu z^\mu + b_{\mu-1} z^{\mu-1} + \cdots + b_1 z + b_0}.$$

2) Es sei $\varphi(Z) = f_1(z)$, also $Z = f[f_1(z)]$ und $z = \varphi_1[\varphi(Z)]$. Mit Hilfe der Ebene $\zeta = \varphi(Z)$, $\zeta = f_1(z)$ erledigt sich die Verwandtschaft

$$Z = \frac{a_n f^n(z) + a_{n-1} f^{n-1}(z) + \cdots + a_1 f(z) + a_0}{b_m f^m(z) + b_{m-1} f^{m-1}(z) + \cdots + b_1 f(z) + b_0}$$

nebst ihrer Umkehrung.

3) Ist $f(Z) = \varphi_1(z)$, so hat man den Fall 2) mit geringfügiger Vertauschung.

4) Ist endlich $\varphi(Z) = \varphi_1(z)$, also $Z = f[\varphi_1(z)]$, $z = f_1[\varphi(Z)]$, so erledigen sich Verwandtschaften von der Form

$$Z = \frac{a_n \varphi^n(z) + a_{n-1} \varphi^{n-1}(z) + \cdots + a_1 \varphi(z) + a_0}{a_m \varphi^m(z) + a_{m-1} \varphi^{m-1}(z) + \cdots + a_1 \varphi(z) + a_0}.$$

Der Leser übe sich an Combinationen der bereits vollständig behandelten Beispiele nach diesen vier Fällen.

5) Die allgemeinsten algebraischen Functionen Z ergeben sich als Auflösungen von Gleichungen von der Form

$$f_n(z) Z^n + f_{n-1}(z) Z^{n-1} + \cdots f_1(z) Z + f_0(z) = 0,$$

wobei die Factoren verschiedene rationale Functionen von z sind. Allgemeine Sätze über diese Functionen geben die genannten Lehrbücher an, besonders Königsberger in der neunten Vorlesung seiner Theorie der elliptischen Functionen. Von einer expliciten Durchführung der betreffenden isogonalen Verwandtschaften kann aber vorläufig noch nicht die Rede sein. Nur in Specialfällen lässt sich eine vollständige Behandlung ermöglichen.

Das einzige weitergehende Beispiel, welches dem Verfasser bekannt geworden ist, gab Lindemann im 19. Bande der Mathem. Annalen, Seite 323—386, „Entwicklung der Functionen einer complexen Variabelen nach Lamé'schen Functionen und nach Zugeordneten der Kugelfunctionen". In § 2 wird dort die Abbildung

$$Z = \frac{\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{z^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$

behandelt.

§ 91. Litteratur.

Abgesehen von den bereits citirten Lehrbüchern, sei für Capitel XII folgende Litteratur angegeben:

Lüroth: Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche. Mathem. Annalen, IV, 1871, Seite 181—184.

Clebsch: Zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Mathem. Annalen, VI, 1873, Seite 216—230.

Nöther: Zur Theorie der algebraischen Functionen. Mathem. Annalen VI, 1873, Seite 351—359.

Brill und Nöther: Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Math. Ann., VII, 1874, S. 269—310.

F. Klein: Ueber eine neue Art Riemann'scher Flächen. Mathem. Annalen, VII, 1874, Seite 558—566. X, 1876, Seite 398—416.

Derselbe: Ueber den Zusammenhang der Flächen. Mathem. Annalen, IX, 1876, Seite 476—482.

W. Dyck: Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen. Mathem. Annalen, XVII, 1880, Seite 473—509.

Derselbe: Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige Normalcurve 4ter Ordnung. Mathem. Annalen, XVII, Seite 510—516.

Thomae: Ueber die algebraischen Functionen, die zu gegebenen Riemann'schen Flächen gehören. Mathem. Annalen, XVIII, 1881, Seite 443.

Chwolson: Ueber das Problem der Stromverzweigung in einer ebenen Platte. Zeitschr. für Mathem. u. Phys. XXIII, 1878, S. 47—60.

Weber: Ueber ein Problem der Abbildung. Mathem. Ann. II, 1870, Seite 140 (betrifft die Lemniscate und den Kreis).

Hans Meyer: Ueber die von geraden Linien und von Kegelschnitten gebildeten Schaaren von Isothermen, sowie über einige von speciellen Curven 3ter Ordnung gebildeten Schaaren von Isothermen. Inauguraldissertation, Göttingen 1879.

Die Abhandlung löst die Aufgabe, aus zwei unendlich benachbarten Curven einer Isothermenschaar die Schaar zu bestimmen, behandelt einige Specialfälle und bestimmt alle rationalen Functionen, durch deren Vermittelung eine Parallelenschaar auf eine Schaar von Curven 3ter Ordnung abgebildet wird. Als solche Functionen ergeben sich $A\zeta = z(z^2 + a)$ und $A\zeta = \frac{z^2+1}{z}$. Die durch Radii vectores darzustellenden Eigenschaften der Curven 3ter Ordnung kommen jedoch nicht zur Sprache.

Dreizehntes Capitel.

Die Abbildungen $Z = \lg z$ und $z = e^Z$ und ihre Combinationen mit anderen Verwandtschaften.

§ 92. Die fundamentalen Beziehungen zwischen beiden Ebenen.

Mit der Betrachtung des natürlichen Logarithmus und seiner Umkehrung, der Exponentialfunction, treten wir in das Gebiet der transscendenten Functionen ein. Schon in § 7 wurde die Vieldeutigkeit der ersteren, die Periodicität der letzteren Function angedeutet. Dort zeigte sich auch, dass die Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene in die verticale Parallelenschaar der Z-Ebene, die Geraden durch den Nullpunkt in die horizontale Parallelenschaar übergehen, dass ferner jedes Blatt der z-Ebene einem unbegrenzt langen Horizontalstreifen von der Breite 2π entspricht. Figur 8 stellte diese Verhältnisse deutlich dar.

Aus den in § 7 entwickelten Formeln

1) $\quad X = \lg r, \qquad Y = \varphi$

2) $\quad x = e^X \cos Y, \qquad y = e^X \sin Y$

ergiebt sich, dass in beiden Ebenen sich folgende Curvensysteme entsprechen;

3) $f(X, Y) = 0$ und $\begin{cases} f(\lg r, \vartheta) = 0 \\ f\left[\lg\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right] = 0 \end{cases}$

4) $f(e^X, Y) = 0$ und $\begin{cases} f(r, \vartheta) = 0 \\ f\left[\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right] = 0 \end{cases}$

5) $f(e^X, e^Y) = 0$ und $\begin{cases} f(r, e^\vartheta) = 0 \\ f\left[\sqrt{x^2+y^2}, e^{\arctan\frac{y}{x}}\right] = 0 \end{cases}$

6) $f(e^X \cos Y, e^X \sin Y) = 0$ und $f(xy) = 0$.

Dass die logarithmische Abbildung den Zusammenhang zwischen der *Ptolemäischen Polarkarte* und der *Mercatorkarte* vermittelt, war gleichfalls in § 7 angedeutet. Aus den Relationen 3) bis 6) erkennt man, wie bequem der analytische Uebergang von beliebigen Curven auf der einen Karte zu dem entsprechenden der andern ist.

Speciell entspricht der Geraden $X = a$ der Kreis $\lg r = a$ um den Nullpunkt, sämmtlichen Geraden $Y = b \pm 2n\pi$ die Gerade

von der Neigung $\vartheta = b$ durch den Nullpunkt. Dass die linken Seiten der Gleichungen

$$\frac{1}{2}\lg(x^2+y^2) = a \quad \text{und} \quad \arctan\frac{y}{x} = b$$

der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen, woraus sich der isothermische Charakter der fraglichen Curvenschaaren ergiebt, ist dem Leser gleichfalls bekannt.

Der Geraden $Y - AX = c$ entspricht die logarithmische Spirale

$$7) \qquad \vartheta - A\lg r = c$$

oder, wenn man $e^{\frac{1}{A}} = \varkappa$ und $\varkappa^{-c} = \varkappa_1$ setzt,

$$7^*) \qquad r = c_1 \varkappa^{\vartheta}.$$

Setzt man in 7) Cartesische Coordinaten ein, so genügt die Gleichung mit der linken Seite der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Demnach sind die gleichwinkligen logarithmischen Spiralen isothermische Curvensysteme. Giebt man c eine arithmetische Werthreihe, so wird die Ebene in ein System congruenter spiralischer Streifen zerlegt, und die Zeichnungen der einzelnen Blätter decken sich, wenn das Intervall der Reihe $c = \frac{2\pi}{n}$ ist. Die Orthogonalschaar, welche die Eintheilung in „ähnliche Rechtecke" vollendet, kann in der Form

$$8) \qquad \vartheta + \frac{1}{A}\lg r = c_1$$

geschrieben werden. Die isogonalen Trajectorien einer solchen Spiralenschaar sind wiederum logarithmische Spiralen. Durch Figur 58 wird die quadratische Eintheilung der z-Ebene durch logarithmische Spiralenschaaren dargestellt.

Von kartographischer Bedeutung sind noch die Curvensysteme, welche beliebigen Geraden und Kreisen der z-Ebene entsprechen. So geht z. B. der Kreis

$$\frac{1}{2}\lg[(x-a)^2+(y-b)^2] = c,$$

oder

$$\frac{1}{2}\lg[r^2 - 2r(a\cos\vartheta + b\sin\vartheta) + a^2 + b^2] = c$$

über in die Curve

$$9) \qquad \frac{1}{2}\lg\left[e^{2X} - 2e^X\left(a\cos Y + b\sin Y\right) + a^2 + b^2\right] = c,$$

während die Gerade $\arctan\frac{y-b}{x-a} = \gamma$ in die Curve

$$10) \qquad \arctan\frac{e^X\sin Y - b}{e^X\cos Y - a} = \gamma$$

übergeht. Die Curven 9) geben z. B. auf der Mercatorkarte Punkte an, deren entsprechende auf dem Globus gleichen Abstand von einem gegebenen Punkte seiner Oberfläche haben. Im speciellen Falle entsprechen sie grössten Kreisen desselben, geben also z. B. die Grenze zwischen Tag und Nacht oder oder die Grenze für die Sichtbarkeit einer Himmelserscheinung an. Schon aus diesem Grunde verdienen sie bei der allgemeinen Anwendung der Merkatorkarte ein eingehenderes Studium. Der Verfasser möchte die durch 9) und 10) dargestellten Linien als *Mercatorcurven* bezeichnen. Sie sind direct in der Form geschrieben, in denen die linke Seite der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt.

Die singulären Punkte ergeben sich, ebenso wie die Vergrösserungsverhältnisse, aus der Gleichung $Z' = \frac{1}{z}$. Dieser Differentialquotient wird Null für den Punkt $z = \infty$, der $Z = +\infty$ entspricht, er wird ∞ für den Punkt $z = 0$, der $Z = -\infty$ entspricht. Der Nullpunkt und der unendliche Punkt an der z-Ebene sind durch den Verzweigungsschnitt zu verbinden, längs dessen der Uebergang von jedem der unendlich vielen Blätter nach dem nächsten vor sich geht. Jeder Umkreisung des Nullpunktes entspricht eine Wanderung um $2\pi i$ in der Z-Ebene. An Figur 46 ist nur das Rückkehren der untersten Ebene zu vermeiden, dann hat man das Verhalten dreier der Ebenen. Er ist demnach ein Windungspunkt von unendlich hoher Ordnung. — Die Z-Ebene ist selbstverständlich *einblättrig*.

Der Leser beweise selbst folgende Sätze:

1) Der Symmetrie (Spiegelung) gegen jede der Geraden $Y = b$ entspricht die Symmetrie gegen jede der Geraden $\vartheta = b$ durch den Nullpunkt der z-Ebene.

2) Der Spiegelung gegen die Gerade $X = a$ entspricht Reciprocität gegen den Kreis $r = e^a$.

3) Der verticalen Parallelverschiebung eines starren Gebildes der Z-Ebene entspricht Drehung des entsprechenden Gebildes der z-Ebene, wobei dasselbe gleichfalls unverändert bleibt.

4) Die horizontale Parallelverschiebung eines starren Gebildes der Z-Ebene giebt ein Anschwellen (oder Zusammenschwinden) des entsprechenden Gebildes der z-Ebene, wobei letzteres sich selbst stets ähnlich bleibt und für seine verschiedenen Lagen den Nullpunkt zum äusseren Aehnlichkeitspunkte hat. Congruenten Gebilden der Z-Ebene also, die nicht gegeneinander verdreht sind, entsprechen ähnliche Gebilde der z-Ebene. Geschieht der Uebergang des ersteren Gebildes von der einen Lage in die andere durch ge-

radlinige Parallelverschiebung, so wandern die Punkte des entsprechenden Gebildes auf logarithmischen Spiralen.

5) Je zwei ähnlichen Gebilden der z-Ebene entsprechen nur dann congruente der Z-Ebene, wenn sich das eine durch blosse Drehung um den Nullpunkt zu dem andern in directe perspectivische Lage versetzen lässt, wobei der Nullpunkt das Centrum der Aehnlichkeit wird. Was folgt daraus für alle Geraden der z-Ebene, ebenso für alle Kreise durch ihren Nullpunkt? Was z. B. für das Kreisbüschel durch 0 und 1?

6) Isothermische Spiegelung gegen die logarithmische Spirale verwandelt log. Spiralen desselben Polpunktes wieder in solche.

§ 93. Eigenschaften der logarithmischen Spirale.

Dieselben lassen sich nach den vorigen Bemerkungen *direct aus denen der Geraden ableiten.* Die wichtigsten sollen ohne ausführlichen Beweis angegeben werden.*)

1) Die logarithmische Spirale schneidet jeden „Radius" unendlich oft und macht unendlich viele Windungen um den Nullpunkt.

2) Folgen die Abweichungen einer Punktreihe auf logarithmischer Spirale arithmetisch aufeinander, so nehmen die Radien geometrisch zu oder ab. Die entsprechenden Theile der Curven sind ähnlich.

3) Durch jeden Punkt geht eine und nur eine log. Spirale gegebenen Centrums und Schnittwinkels. Dieselbe trifft sich selbst nirgends wieder.

4) Sämmtliche log. Spiralen desselben Schnittwinkels sind congruent. Durch Drehung um das Centrum erhält man sämmtliche von gleichem Centrum.

5) Inversion mittels eines Kreises um das Centrum verwandelt jede logarithmische Spirale in eine ihr symmetrische Spirale.

6) Gerade, welche die logarithmische Spirale unter constantem Winkel schneiden, umhüllen eine congruente Spirale. Schneiden sie unter 90°, so erhält man die Evolute. Daraus ergeben sich elementare Constructionen des Krümmungsmittelpunktes, sobald Centrum und Schnittwinkel der Spirale bekannt sind. In welche Sätze gehen die unter 6) genannten durch Inversion gegen einen Kreis um das Centrum über?

7) Der Krümmungskreis schneidet die log. Spirale nur einmal, der eine Theil der Curve liegt also ganz innerhalb, der andere ganz

*) Die sehr einfachen Beweise befinden sich in der Abhandlung des Verfassers über die logarithmische Abbildung im 16. Bande der Zeitschr. für Math. und Physik.

ausserhalb des Krümmungskreises. Die sämmtlichen Krümmungskreise erfüllen die ganze Ebene stetig, ohne sich zu schneiden, sie geben also eine „spiraloidische Kreisschaar" von merkwürdigen Eigenschaften. Durch jeden Punkt der Ebene geht für jede Spirale einer gleichwinkligen Schaar nur ein Krümmungskreis. Die Berührungspunkte jedes Kreises mit seiner Spirale liegen auf dem Krümmungskreise der durch den Punkt gehenden Spirale. Darauf beruht eine einfache Construction des durch einen beliebigen Punkt gehenden Krümmungskreises für eine gegebene Spirale.

8) Die von einem beliebigen Punkte an eine gleichwinklige Spiralschaar gelegten Tangenten berühren in Punkten eines Kreises, welcher durch den gegebenen Punkt, den Nullpunkt und den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt der durch den gegebenen Punkt gehenden Spirale geht. Parallele Tangenten z. B. berühren auf einer Geraden durch den Nullpunkt.

9) Kreisreihen in dem Streifen zwischen zwei Spiralen einer gleichwinkligen Schaar, welche die beiden Spiralen und sich selbst aufeinander folgend berühren, haben ihre Berührungspunkte auf der Spirale, die um gleiche und entgegengesetzte Winkel gegen die beiden ersten gedreht ist. (Der Streifen ist durch sie isothermisch halbirt. Für je zwei solcher Kreise ist gewissermassen der Nullpunkt spiraloidischer Aehnlichkeitspunkt.)

10) Werden zwei Spiralen derselben Schaar auf constanten verschiedenen Temperaturen erhalten, so sind Spiralen derselben Schaar Isothermen, die orthogonalen Spiralen Stromlinien. Die entsprechenden hydrodynamischen und elektrodynamischen Deutungen ergeben sich von selbst. —

Auch über sich schneidende logarithmische Spiralen desselben Centrums, die also verschiedene Schnittwinkel haben, lassen sich zahlreiche Sätze aussprechen.

§ 94. Cartographisches.

Man denke sich eine vollständige Polarkarte nach Ptolemäus in der Weise construirt, wie es in der Einleitung angegeben wurde, denke sich ferner den Aequator der entsprechenden Mercatorkarte vertical, die Pole also rechts und links in unendlicher Entfernung, und zwar so, dass $Z = \lg z$ die analytische Beziehung beider Ebenen zu einander ausdrückt. Die Meridiane und Parallelkreise des Globus sind auf der ersten Karte in ein Strahlenbüschel und in die concentrische Kreisschaar um den Nullpunkt übergegangen, und zwar findet zwischen Original und Abbildung Conformität statt. Den

loxodromischen Linien (Schifffahrtslinien) der Kugel entsprechen also, wie in der Einleitung angedeutet wurde, logarithmische Spiralen, und diesen nach § 92 auf der Mercatorkarte gerade Linien.

Ist nun ξ der Winkelabstand eines ptolemäisch projicirten Punktes von dem Pole, in dem die Projectionsebene berührt, so lässt sich mit Hülfe des Peripheriewinkels $\frac{\xi}{2}$ leicht elementar beweisen, dass man durch Division mit $\cos^2\frac{\xi}{2}$ aus dem Bogenelement $d\zeta$ der Kugel das entsprechende Bogenelement dz der Projectionsebene erhält. Es ist also

$$dz = \frac{d\zeta}{\cos^2\frac{\xi}{2}}.$$

Bei der Abbildung $Z = \lg z$ wird aber $dZ = \frac{dz}{r}$, wo r der projicirte Polabstand, also [wenn der Kugeldurchmesser gleich 1 gesetzt wird] gleich $\tan\frac{\xi}{2}$ ist. Letzterer Werth eingesetzt giebt

$$dZ = \frac{dz}{\tan\frac{\xi}{2}} = \frac{d\zeta}{\tan\frac{\xi}{2}\cos^2\frac{\xi}{2}} = \frac{2\,d\zeta}{\sin\xi}.$$

Das Vergrösserungsverhältniss zwischen dem Kugelelement und dem entsprechenden Elemente der Mercatorkarte ist also $\frac{2}{\sin\xi}$, d. h. *es ist umgekehrt proportional dem Sinus des Polabstandes.* Mit Hülfe der reciproken Höhen der sinus-Curven lässt sich also das nach den Polen zunehmende Vergrösserungsverhältniss leicht graphisch darstellen. Beliebigen Kugelkreisen entsprechen nun im Allgemeinen Curven von der Form 9. Umschliessen die Kreise den projicirten und damit auch den projicirenden Pol, so sind die Mercatorcurven Wellenlinien, die aus congruenten Theilen bestehen. Jede Welle hat dabei die senkrechte Basis 2π, auf der ihre Symmetrieaxe senkrecht steht. Der Wendepunkt jeder halben Wellenlinie liegt auf der Mitte der Höhe. Er theilt die Linie wiederum in congruente Theile, so dass jede Wellenlinie 4 congruente Theile hat. Schliesst hingegen der Kreis die Pole aus, so entsteht ein unendlich oft wiederholtes Oval, welches zwei orthogonale Symmetrieaxen hat. Geht endlich der Kreis durch einen der Pole, so entstehen in der Ptolemäischen Projection entweder Gerade, oder Kreise durch den Nullpunkt, die unter gewissen Bedingungen den letzteren zum Aehnlichkeitspunkte haben. Dann hat man in der Mercatorkarte Ovale, deren Mittelpunkt nach $+\infty$ oder $-\infty$ fällt, während ihre Höhe im Unendlichen gleich 2π ist. Man hat also nach der Bemerkung 5 des § 92 lauter congruente Curven, die entweder nach rechts, oder

nach links offen sind, und deren Gleichung sich auf die Form 10 reduciren lässt.

Man kann die Geometrie dieser Curven in grosser Vollständigkeit aus der Geometrie des Kreises und der Geraden direct ableiten. Sie sind, wie schon gesagt, besonders für die Darstellung gewisser astronomischer Verhältnisse auf der Mercatorkarte massgebend, und insofern des Studiums werth. Dass mit ihnen als isothermischen Curven auch physicalische Probleme gelöst werden können, ist selbstverständlich. Die unendlich langen Ovale findet man z. B. auf S. 49 der „theoretischen Hydrodynamik" von Auerbach in Fig. 5 wiedergegeben, womit ein Wink für weitere Ausbeutung gegeben sein mag. Der Leser versuche selbst die den einfachsten Isothermenschaaren der z-Ebene (welche mit Kreisen und Geraden zusammenhängen, aber gegen den Nullpunkt beliebige Lage haben) entsprechenden Schaaren der Mercatorcurven mit Annäherung zu construiren und die zugehörigen mathematisch-geographischen und physicalischen Deutungen zu geben. Es handelt sich dabei z. B. um den stationären Zustand unendlich langer Streifen, in welche unter gegebenen Bedingungen Elektricität einströmt und abgeleitet wird. Leicht ist z. B. der Fall zu behandeln, für welchen die Elektricität in einem Punkte der Mittellinie einströmt, während sie auf den beiden Grenzlinien gleichmässig abgeleitet wird.

§ 95. Combinationen mit anderen Verwandtschaften.

Die Transformation $Z = \lg \frac{az+b}{cz+d}$ combinirt die logarithmische Abbildung mit der Kreisverwandtschaft. Ihre Umkehrung, die von der Form $z = \frac{a_1 e^Z + b_1}{c_1 e^Z + d_1}$ ist, verwandelt die horizontale Parallelenschaar der Z-Ebene in ein Kreisbüschel, die verticale in die orthogonale Kreisschaar, während beliebige andere Parallelenschaaren in die logarithmischen Doppelspiralen des § 19 übergehen, deren Eigenschaften sofort aus denen der Geraden oder der logarithmischen Spiralen folgen. Die einfachste Gestalt der Gleichung der letzteren Curven ist

$$\frac{p}{q} = ck^{\varphi - \chi}.$$

Die Aufgabe, diese Gleichung in der isothermischen Form zu schreiben, die der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, ist ein einfaches Uebungsbeispiel. Durch Figur 59 wird das System dargestellt. Dasselbe lässt sich als ptolemäische Projection einer

beliebig liegenden Loxodromenschaar nebst Orthogonalschaar betrachten. Einige Eigenschaften mögen zu den in § 19 erwähnten ohne Beweis*) hinzugefügt werden.

1) Sämmtliche gleichwinkligen Doppelspiralen stehen in Kreisverwandtschaft.

2) Zu jeder giebt es in derselben Schaar eine congruente; nur zwei Grenzfälle sind auszunehmen: der eine giebt die in gewissem Sinne symmetrische Spirale durch den Halbirungspunkt der Strecke zwischen den Polpunkten, der andere die einzige durch den unendlichen Punkt gehende, also mit Asymptoten durch den genannten Halbirungspunkt versehenen. Dasselbe gilt von der Orthogonalschaar.

3) Jede isogonale Trajectorienschaar einer solchen Doppelspiralenschaar ist wiederum eine solche.

4) Die Reihe von Berührungskreisen in einem Streifen zwischen zwei Spiralen derselben Schaar hat ihre Berührungspunkte auf der „isothermisch halbirenden" Doppelspirale. Rotation sämmtlicher eingeschriebener Kreise um ihr Centrum führt auf eine der Cyclide verwandte transcendente Fläche.

5) Kreise durch den einen Pol, welche die Doppelspirale gleichwinklig schneiden, geben als Enveloppe eine gleichwinklige Doppelspirale.

6) Die Tangenten, welche sich von dem einen Polpunkte aus an eine Schaar dieser Curven legen lassen, haben ihre Berührungspunkte auf einer Geraden durch den andern Pol, welcher der zur Schaar gehörigen Asymptote parallel ist.

7) Zieht man durch den einen Pol eines solchen Curvensystems eine Parallele zur Asymptote und bildet man in den Schnittpunkten die Normalen, so gehen diese durch den andern Pol.

8) Die Krümmungskreise schneiden die Doppelspirale nur je einmal, sie erfüllen die ganze Ebene stetig und bilden eine Kreisschaar von merkwürdigen Eigenschaften.

9) Jede Doppelspirale einer Schaar hat einen Wendepunkt. Alle Wendepunkte liegen auf der Asymptote der Schaar.

10) Für eine Schaar von Doppelspiralen geht durch jeden Punkt der Ebene ein und nur ein Krümmungskreis. Die Berührungspunkte sämmtlicher liegen auf demjenigen dieser Kreise, der durch den gegebenen Punkt geht.

11) Die hydrodynamischen, elektrodynamischen und wärmetheoretischen Deutungen versuche der Leser selbst.

---

*) Die leichten Beweise befinden sich in des Verfassers Abhandlung über die log. Abbildung im 16. Bande der Zeitschr. für Mathem. u. Phys.

In gleicher Weise giebt die Abbildung $Z = \lg \sqrt{z}$ den Zusammenhang zwischen den Parallelenschaaren und den confocalen Lemniscaten 2ter Ordnung nebst ihren isogonalen Trajectorien, deren Eigenschaften sich ebenso leicht entwickeln lassen, wie die der Doppelspiralen. (Vgl. § 51). Die Erweiterung nach den Lemniscaten höherer Ordnung hin ist leicht auszuführen.

Ebenso giebt die Abbildung $Z = \lg [z + \sqrt{z^2 - 1}]$ die Transformation der confocalen Ellipsen und Hyperbeln nebst ihren isogonalen Trajectorien in die Parallelenschaaren. (Vgl. Cap. VIII.) Die Umkehrung $z = \frac{1}{2}(e^Z + e^{-Z})$ führt direct auf die Abbildung $z = \cos Zi$, die im nächsten Abschnitt zur Sprache kommt.

Der reelle und der imaginäre Theil der so abbildenden Functionen geben nach § 42 stets die Isothermengleichungen in der Form, welche der Potentialgleichung genügt.

§ 96. Litteratur.

Die Litteratur über den eigentlichen Gegenstand dieses Capitels ist wenig umfangreich, mehr existirt über das kartographische Gebiet.

Ueber letzteres vergleiche man das Handbuch der Mathem. Phys. u. s. w. von Rud. Wolf. Bd. II S. 151 etc. Dort wird über die stereographische Projection des Ptolemäus resp. Hipparch das Nöthige mitgetheilt. Auf S. 153 kommt Gerhard Kremer (Mercator) zur Sprache, der von 1512—1595 lebte. Letzterer konnte, da die höheren Rechnungen zu seiner Zeit noch nicht existirten, die Regel der Kartenconstruction nur folgendermassen geben: „Gradus latitudinum versus utrumque polum auximus pro incremento parallelorum supra rationem quam habent ad aequinoctialem", d. h. man lässt die Breitengrade in dem Verhältnisse wachsen, in welchem die Parallelkreise zum Aequator stehen. An Stelle von l und b (Länge und Breite) des Originals tritt

$$l_1 = l \text{ und } b_1 = \lg \tan \left(45^0 + \frac{b}{2}\right)$$

im Bilde, wenn der Halbmesser zur Einheit genommen wird.

Prof. Thomae stellt diese kartographischen Dinge in einem Vortrage vom Jahre 1876, abgedruckt in den Berichten der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br. (Bd. VII, Heft 1) in interessanter Weise zusammen.

Lambert leitet in den schon citirten Beiträgen das Wesentliche der Mercatorprojection wissenschaftlich ab.

Ueber die stereographische Projection spricht sich neben den

Lehrbüchern der Karthographie Klügels Wörterbuch ausführlicher aus. Auch in Grunerts Archiv Bd. 39 S. 332 werden die Haupteigenschaften entwickelt.

Amstein nennt in dem der citirten Dissertation vorausgeschickten historischen Abriss noch Kästner (Dissert. mathem. et phys.), und Euler [de repraesentatione superficiei sphaericae super plano, Acta acad. scient. imp. petrop. 1777. I].

Lagrange und Gauss sind bereits citirt.

Die Geometrie der logarithmischen Spiralen und Doppelspiralen auf Grundlage der conformen Abbildung gab der Verfasser im 16. Bande der Zeitschr. für Mathem. u. Phys.

Hierher gehören noch die kinematischen Untersuchungen von Burmester über kreisverwandt-veränderliche Systeme im 20. Bd. der Zeitschr. für Mathem. u. Phys. S. 405—422, wo die log. Doppelspiralen zur Sprache kommen.

Die Aehnlichkeitstransformationen und ihre Beziehungen zu den metrischen Relationen der logarithmischen Spirale kommen zur Sprache bei Clebsch (Lindemann), Vorlesungen über Geometrie, S. 995.

Hicks: On velocity and electric potentials between two parallel planes, Quat. J. of pure and applic. mathem. t. XV, 274—315 (1877/78), ferner:

Maxwell, Treatise on electricity and magnetism, 2te ed. 1881, behandeln einige physicalische Beispiele, welche unendliche Streifen betreffen.

Vierzehntes Capitel.

Abbildung mittels der Kreisfunctionen und ihrer Umkehrungen.

§ 97. Die Abbildungen $Z = \cos z$ und $z = \arccos Z$.

Das Additionstheorem giebt die beiden Gleichungen

1) $$X \pm Yi = \cos(x \pm yi) = \cos x \cos yi \mp \sin x \sin yi.$$

Durch Addition und Subtraction erhält man

2) $$X = \cos x \cos yi = \cos x \, \mathfrak{Cof}\, y^*)$$

) Einiger Vereinfachungen der Schreibweise halber werden die Hyperbelfunctionen eingeführt, und zwar mit denselben Zeichen, wie in dem Lehrbuche von Günther über dieselben. So wird z. B. in Gl. 3) das scheinbar Imaginäre entfernt, und in Gl. 7) tritt eine erhebliche Abkürzung ein.

3) $$Y = -\frac{\sin x \sin yi}{i} = -\sin x \operatorname{Sin} y.$$

Aehnlich, wie in § 61, eliminire man x und y durch Quadrirung und Addition resp. Subtraction. Man erhält

4) $$\frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1,$$

5) $$\frac{X^2}{\cos^2 yi} - \frac{Y^2}{\sin^2 yi} = \frac{X^2}{\operatorname{Cos}^2 y} + \frac{Y^2}{\operatorname{Sin}^2 y} = \frac{X^2}{\frac{1}{4}(e^y + e^{-y})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(e^y + e^{-y})^2} = 1.$$

Der Linie $x = a$, überhaupt sämmtlichen Linien $x = a \pm 2n\pi$ entspricht also die Hyperbel

6) $$\frac{X^2}{\cos^2 a} - \frac{Y^2}{\sin^2 a} = 1, \quad \text{oder} \quad P - Q = 2\cos a,$$

also in isothermischer Schreibweise, die der Gleichung $\Delta u = 0$ Genüge leistet, sobald man Cartesische Coordinaten einsetzt:

6*) $$\arccos \frac{P-Q}{2} = a.$$

Den Linien $y = \pm b$ entspricht die Ellipse

7) $$\frac{X^2}{\frac{1}{4}(e^b + e^{-b})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(e^b - e^{-b})^2} = \frac{X^2}{\operatorname{Cos}^2 b} + \frac{Y^2}{\operatorname{Sin}^2 b} = 1,$$

$$\text{oder } P + Q = e^b + e^{-b} = 2\operatorname{Cos} b,$$

in isothermischer Schreibweise also

7*) $$\lg\left[\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - 1}\right] = b, \quad \text{oder} \quad \operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\frac{P+Q}{2} = b.$$

Man vergleiche hierzu S. 153. Die Brennpunkte der Kegelschnitte sind die Punkte ± 1, die Halbaxen der Ellipsen sind $\operatorname{Cos} b$ und $\operatorname{Sin} b$, die der Hyperbeln sind $\cos a$ und $\sin a$, so dass sich der Neigungswinkel a für die Asymptote des ersten Quadranten ergiebt und arithmetischen Werthfolgen von a arithmetisch auf einander folgende Neigungswinkel der Asymptoten entsprechen. Es handelt sich also um die schon in Cap. VIII besprochenen Isothermenschaaren, deren physikalische Bedeutung ebenfalls schon erörtert ist.

Ganz anderer Art, wie in Cap. VIII, verhalten sich die Riemann'schen Blätter der Z-Ebene, über die wir uns ausführlicher verbreiten wollen. Ein Blick auf die Figur 60a und 60b, welche das gegenseitige Entsprechen beider Ebenen darstellt, zeigt, dass der reellen Axe von -1 bis $+\infty$ in der Z-Ebene die sämmtlichen Linien $x = \pm 2n\pi$; der imaginären Axe von -1 bis ∞ die sämmt-

lichen Linien $x = \pm 2(n+1)\pi$ entsprechen. Jedem verticalen Streifen von der Breite 2π in der z-Ebene entspricht nach der Figur die doppelt zu denkende Z-Ebene. Während also die erstere schlicht ist, besteht letztere aus unendlich vielen Blättern. Die Verzweigungspunkte ergeben sich aus den Differentialquotienten $Z' = -\sin z$, welcher für $z = \pm 2n\pi$ verschwindet, d. h. für Punkte, denen in der Z-Ebene die Punkte ± 1 entsprechen. Diese sind Verzweigungspunkte. Ein solcher ist auch der unendliche Punkt der Z-Ebene, in dem wiederum alle Blätter zusammenhängen müssen, da ihm die unendlich fernen Bereiche aller Einzelstreifen der Z-Ebene entsprechen. Damit stimmt zusammen, dass Z' für unendlich grosses, z. B. als $\infty \cdot i$ aufzufassendes z, unendlich gross wird. Man denke sich nun die Verzweigungsschnitte der Z-Ebene in die reelle Axe von $+1$ nach -1 und von $+1$ nach ∞ gelegt, dann kann man den Zusammenhang folgendermassen festsetzen. Zwischen $+1$ und -1 durchkreuzen sich die beiden Schichten jedes Doppelblattes, während links von -1 alle Blätter schlicht übereinander liegen. In Fig. 60c ist dieses Verhalten an drei der Doppelebenen dargestellt. Der dritte Theil der letzteren Figur zeigt das Verhalten rechts von $+1$. Beim Ueberschreiten des dortigen Schnittes in der *einen* Richtung gelangt man aus der oberen Schicht jedes Doppelblattes in die obere des *darunterliegenden* Doppelblattes, aus der unteren Schicht hingegen in die untere Schicht des *darüberliegenden* Doppelblattes. (Die unteren Schichten sind in der Figur 60c besonders hervorgehoben.) Dieses verschiedene Verhalten der oberen und unteren Schichten ist nicht willkürlich, sondern nothwendig, und stimmt mit dem Verhalten der z-Ebene überein. Setzt man z. B. fest, dass der unteren Hälfte jedes Streifens der z-Ebene die untere Schicht des entsprechenden Doppelblattes, der oberen Hälfte die obere Schicht entsprechen soll, so ergiebt sich Folgendes: Ein kleiner Kreis um einen der reellen Punkte $\pm 2n\pi$ der z-Ebene, z. B. um den Punkt 2π führe, im Raume Q rechts drehend beginnend, aus der oberen Hälfte des Streifens I in die obere des Streifens II, dann in die untere des Streifens II, darauf in die untere des Streifens I und von dort in die obere des Streifens I zurück, wobei er also die 4 benachbarten Quadrate Q, A, Q, A, die sich um den Punkt 2π gruppiren, passirt. Der entsprechende kleine Kreis der Z-Ebene umgiebt den Punkt $+1$, muss also, da dort Q und A mit dem Winkel 180^0 statt 90^0 aneinanderliegen und da gleichmässige Winkelvergösserung stattfindet, einen doppelten Umgang machen. Ist nun I_0 die obere Schicht des fraglichen Doppelblattes, I_u die untere, ist ferner II_0 die obere, II_u die untere Schicht des drunterliegenden

Doppelblattes, so führt, wie Fig. 60d und der zweite und dritte Schnitt in Fig. 60c zeigen, der Weg in der That cyclisch durch die Blätter

$$\ldots I_0\ II_0\ II_u\ I_u\ I_0\ II_0 \ldots,$$

wobei die Rückkehr nur durch die *verschiedene* Art der Durchkreuzungen bei gleichem Umgang rechts von $+1$ zu ermöglichen war.

Bei dieser Art des Umgangs ist also $+1$ ein Windungspunkt 1ter Ordnung für die so zusammenhängenden Flächengruppen.

Wird hingegen der Schnitt von $+1$ nach -1 bei dem Umgange um den Punkt $+1$ der Z-Ebene nicht mit überschritten, indem man z. B. auf einer der gezeichneten Ellipsen wandert, so entsteht, wenn die Wanderung im gleichen Sinne geschah, wie vorher, entweder Uebergang

$$\ldots I_0,\ II_0,\ III_0,\ IV_0 \ldots$$

aus jeder oberen Schicht in die obere Schicht des nächsten *darunterliegenden* Doppelblattes, oder aus jeder unteren Schicht in die untere Schicht des nächsten *darüberliegenden* Doppelblattes, z. B. wenn man rückwärts negativ zählt, der Gang

$$\ldots I_u,\ O_u,\ -I_u,\ -II_u,\ -III_u \ldots,$$

so dass ein solches Umkreisen *unendlich viele Windungen giebt*, ohne zu schliessen.

Dass endlich der Punkt -1 der Z-Ebene für kleine ihn umgebende Kreise ein Windungspunkt 1ter Ordnung ist, wird der Leser ohne Weiteres aus den Figuren abnehmen.

Für den unendlichen Punkt ist besonders darauf aufmerksam zu machen, dass in ihm alle unteren Schichten für sich, ebenso alle oberen Schichten für sich zusammenhängen, während keine einzige obere Schicht mit einer unteren im Zusammenhange steht. Man erkennt dies daraus, dass jeder der besprochenen Ellipsenwege eine Umkreisung des unendlichen Punktes der Z-Ebene ist. Man kann dies auch aus dem Vergleiche mit der Riemann'schen Fläche des Capitel VIII schliessen.

Damit ist der Zusammenhang beider Ebenen endgültig in *eindeutiger* Weise geregelt.

Der Leser achte noch auf die Symmetrieverhältnisse innerhalb jedes einzelnen Streifens, ferner darauf, dass die obere Hälfte jedes Verticalstreifens von der Breite 2π auf ein Blatt der Z-Ebene abgebildet wird, jedoch ist das Blatt von -1 nach $+1$, ebenso von $+1$ nach $+\infty$ aufgeschnitten zu denken. Das Verhalten ist also etwas anders, als bei der Mercatorprojection.

In beiden Ebenen entsprechen sich folgende Curvensysteme:

$$8)\ f[X, Y] = 0 \text{ und } \begin{cases} f\left[\left(\cos x \cos yi\right), \left(-\frac{\sin x \sin yi}{i}\right)\right] = 0 \\ \text{oder} \\ f[(\cos x \operatorname{Cof} y), \quad (-\sin x \operatorname{Sin} y)] = 0, \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases} f\left[\left(\arccos \frac{P-Q}{2}\right), \left(\operatorname{Arc\,Cof} \frac{P+Q}{2}\right)\right] = 0 \\ \text{oder} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{und } f(xy) = 0. \\ f\left[\left(\arccos \frac{P-Q}{2}\right), \lg\left(\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - 1}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

So geht z. B. die Gleichung der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ über in die schon in § 64 gegebene der isogonalen Trajectorien der confocalen Ellipsen- oder Hyperbelschaar, die sich also neben der Form 20) auf Seite 152 noch auf folgende Art schreiben lässt:

$$10)\ \begin{cases} \frac{1}{a} \arccos \frac{P-Q}{2} + \frac{1}{b} \lg\left[\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - 1}\right] = 1, \\ \frac{1}{a} \arccos \frac{P-Q}{2} + \frac{1}{b} \operatorname{Arc\,Cof} \frac{P+Q}{2} = 1. \end{cases}$$

Dass auch sie Isothermenschaaren sind, ist selbstverständlich. Die isothermische Schreibweise ergiebt sich z. B. aus der Gleichung $y - Ax = b$ der schrägen Geraden als

$$10^*)\ \begin{cases} \lg\left[\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1}\right] - A \arccos \frac{P-Q}{2} = b \\ \text{oder} \\ \operatorname{Arc\,Cof} \frac{P+Q}{2} - A \arccos \frac{P-Q}{2} = b. \end{cases}$$

Die linke Seite muss jetzt der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen. In dieser Gestalt geben die Gleichungen z. B. elektrische Spannungscurven oder Stromlinien an. [Die Figurentafel zu der Abhandlung des Herrn Guébhard*): „Figuration électrochimique etc.“ enthält unter Nr. 40 die experimentelle Wiedergabe einer von mir angefertigten Zeichnung.] Sie sind leicht mit Annäherung in Figuren nach Art 60a als Diagonalcurven einzuzeichnen, wodurch man gleichzeitig die Rechteckseintheilung der Ebene erhält. Ihre wesentlichen Eigenschaften lassen sich ebenso, wie es im vorigen Capitel mit denen der logarithmischen Spirale geschah, ohne Weiteres aus denen der Geraden ableiten.

Statt der Beziehung 9) könnte man auch folgende einführen. Es entsprechen sich

---

*) Journal de physique théorique et appliquée, 1882, 2. serie, page 205.

11) $$f\left[\frac{P-Q}{2}, \frac{P+Q}{2}\right] = 0 \text{ und } \begin{cases} f[\cos x, \mathfrak{Cof}\, y] = 0 \\ \text{oder} \\ f\left[\cos x, \frac{e^y + e^{-y}}{2}\right] = 0. \end{cases}$$

Dabei wird direct von den elliptischen Coordinaten zu den Cartesischen übergeführt.

Für einen Zweck des folgenden Abschnitts sei noch angegeben, dass den Kreisen $\lg R = c$ um den Nullpunkt der Z-Ebene die Isothermenschaaren

12) $$\lg \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x\right)} = c,$$

den Geraden $\arctan \frac{Y}{X} = \gamma$ die Isothermenschaaren

13) $$\arctan\left[\frac{e^{-y} - e^{y}}{e^{-y} + e^{y}} \tan x\right] = \gamma$$

entsprechen, Die Schreibweise lässt sich vereinfachen, jedoch genügt die hier gegebene der Differentialgleichung $\Delta u = 0$.

§ 98. Die Abbildung $Z = \sin z$ und ihr Zusammenhang mit $Z = \cos z$.

In derselben Weise, wie in § 97, ergiebt sich, dass den Linien $x = a \pm 2n\pi$ die Hyperbel

14) $$\frac{X^2}{\sin^2 a} - \frac{Y^2}{\cos^2 a} = 1, \text{ oder } P - Q = 2\sin a, \text{ oder } \arcsin \frac{P-Q}{2} = a,$$

den Linien $y = \pm b$ die Ellipse

15) $$\frac{X^2}{\cos^2 bi} - \frac{Y^2}{\sin^2 bi} = 1, \text{ oder } \frac{X^2}{\mathfrak{Cof}^2 b} + \frac{Y^2}{\mathfrak{Sin}^2 b} = 1,$$

$$\text{oder } \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Cof} \frac{P+Q}{2} = b$$

entspricht.

Die Ellipse stimmt mit der des vorigen Abschnitts vollständig überein, bei der Hyperbel sind $\sin a$ und $\cos a$ vertauscht, so dass der Neigungswinkel der Asymptote im ersten Quadranten jetzt $90^0 - a$ ist, d. h. an Stelle der vorigen Hyperbel ist ihre Complementarhyperbel getreten. (Vergl. § 59.) Da nun $\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z}$ ist, so folgt das schon früher bewiesene Resultat, dass bei der Abbildung $Z = \sqrt{1 - z^2}$ jede Ellipse um ± 1 sich selbst, jede Hyperbel aber in ihre Complementarhyperbel übergeht, ohne weitere Rechnung.

Bei der Abbildung $Z = \sin z$ ist ferner $Z' = \cos z$. Die An-

gelegenheit der Windungspunkte erledigt sich also wie im vorigen Abschnitt. Constanten absoluten Betrags ist der Differentialquotient für Kreise um den Nullpunkt der Z-Ebene, d. h. für die dem letzteren in der z-Ebene entsprechenden Curven, d. h. für die Curven 12 des § 97. Dieselben sind also nach § 46 proportionaler Länge mit den Curven, welche in der Z-Ebene den Kreisen um den Nullpunkt der Z-Ebene entsprechen, d. h. (nach § 59) für die Lemniscaten $\sqrt{P \cdot Q} = c$ mit den Brennpunkten ± 1. Folglich

Der einfache Umgang um die Lemniscate $\sqrt{P \cdot Q} = c$ *mit dem Brennpunkte* ± 1 *ist das c-fache von der Bogenlänge der Curve*

$$16) \qquad \frac{1}{2}\sqrt{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x} = c,$$

nur ist letztere auf einen verticalen Flächenstreifen von der Breite 2π *zu beschränken, sofern sie nicht geschlossen ist.* [Im Falle des Schliessens handelt es sich natürlich um eins der unendlich vielen Ovale.] Für $c = 1$ findet also Gleichheit der rectificirten Peripherien statt. Die Resultate, welche die Theorie der elliptischen Functionen über die Rectification lemniscatischer Curven giebt*), lassen sich also direct auf die transscendenten Curven 16) übertragen. Bemerkenswerth ist, dass, wenn die Lemniscate aus getrennten Ovalen besteht, also für $c < 1$, auch innerhalb des Streifens von der Breite 2π die Curven 16) aus zwei getrennten Ovalen bestehen. Für $c = 1$ stossen dieselben, wie die der gewöhnlichen Lemniscate, rechtwinklig zusammen, was auch nach rechts und links mit den periodisch sich anschliessenden Figuren geschieht. Für $c > 1$ liegen in dem Streifen, und zwar symmetrisch gegen die reelle Axe, zwei getrennte Wellenlinien. Man kann die genannten Curven leicht angenähert in die Figur 60b einzeichnen, indem man in die quadratisch eingetheilte Figur 60a Kreise um den Nullpunkt einträgt und ihren Verlauf in den entsprechenden Quadraten von 60b markirt.

Die Curven 16) oder noch besser 12) lösen z. B. folgendes Problem: In den Streifen von der Breite π werde an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ Elektricität eingeleitet, im Unendlichen abgeleitet, dann sind die Curven 12) Spannungscurven, die Curven 13) Stromlinien. Der Gegenstand lässt sich mühelos weiter verfolgen.

Ueber die Behandlung der Abbildung $z = \arcsin Z$ mit Hilfe des Integrals

*) Vergl. z. B. Schlömilch, Comp. der Analysis, II. Seite 339 (2. Aufl.).

$$z = \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{1 - Z^2}}$$

informire man sich nach den Lehrbüchern, z. B. nach Durège.

§ 99. Die Abbildungen $Z = \tan z$ und $z = \arctan Z$.

Aus $x + yi = \arctan (X + Yi)$ folgt $x - yi = \arctan X - Yi$, also durch Addition und Subtraction

$$2x = \arctan \frac{2X}{1 - (X^2 + Y^2)}, \quad 2yi = \arctan \frac{2Yi}{1 + (X^2 + Y^2)}.$$

Den Linien $x = a \pm n\pi$ entspricht also das Kreisbüschel durch $\pm i$ mit der Gleichung

1) $$\frac{2X}{1 - (X^2 + Y^2)} = \tan 2a,$$

den Linien $y = \pm b$ die orthogonale Kreisschaar

2) $$\frac{2Y}{1 + (X^2 + Y^2)} = \frac{\tan 2bi}{i} = \mathfrak{Tan}\, 2b.$$

Um direct auf die Bicircularcoordinaten zu gelangen, operire man folgendermassen:

3) $$x + yi = \arctan (X + Yi) = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + (X + Yi)i}{1 - (X + Yi)i},$$

also

4) $$x - yi = \arctan (X - Yi) = -\frac{1}{2i} \lg \frac{1 - (X - Yi)i}{1 + (X - Yi)i},$$

folglich durch Addition:

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{1}{2i}\left[\lg \frac{1 - Y + Xi}{1 + Y - Xi} - \lg \frac{1 - Y - Xi}{1 + Y + Xi}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\lg \frac{1 - Y + Xi}{1 - Y - Xi} - \lg \frac{1 + Y - Xi}{1 + Y + Xi}\right] \\ &= \arctan \frac{-X}{Y - 1} - \arctan \frac{-X}{Y + 1} = \Phi - X, \end{aligned}$$

so dass der Liniengruppe $x = a$ wiederum das obige Kreisbüschel

5) $$\frac{1}{2}\left[\Phi - X\right] = a$$

entspricht. Denkt man sich in der Klammer $\pm 2n\pi$ beigefügt, so ergiebt die Halbirung sofort $\pm n\pi$ als Periode, was oben als bekannt angenommen war. Hier sind Φ und X die Neigungen der von $\pm i$ ausgehenden Radii vectores gegen die positive imaginäre Axe, wofür man jedoch ohne Aenderung die Neigungen gegen die reelle Axe nehmen kann, da die Aenderung $\frac{\pi}{2}$ sich hebt.

Subtraction ergiebt aus den Gleichungen 3) und 4)

$$2yi = \frac{1}{2}\left[\lg\frac{1-Y+Xi}{1+Y-Xi} = \lg\frac{1-Y-Xi}{1+Y+Xi}\right] = \frac{1}{2i}\lg\frac{(1-Y)^2+X^2}{(1+Y)^2+X^2},$$

oder nach Entfernung von i und Einführung der Radil vectores P und Q

$$y = \frac{1}{2}\lg\frac{P}{Q},$$

so dass den Linien $y = b$ die zur obigen orthogonalen Kreisschaar

$$6) \qquad \frac{1}{2}\lg\frac{P}{Q} = b$$

entspricht.

Es entsprechen sich also in beiden Ebenen folgende Curvensysteme:

$$7) \qquad f\left[\frac{\Phi - X}{2},\ \frac{1}{2}\lg\frac{P}{Q}\right] = 0 \qquad \text{und } f(xy) = 0.$$

Die Ausbeutung dieser Beziehung nach geometrischer, geographischer und physikalischer Richtung bietet keine Schwierigkeiten, auch die Ermittelung zahlreicher, der Gleichung $\triangle u = 0$ genügender Uebungsbeispiele kann mühelos geschehen.

Durch Entwerfen einer leichten Zeichnung stelle man fest, dass dem Wege von 0 nach $+\infty$ auf der reellen Axe der Z-Ebene der Weg von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ (oder eine periodische Wiederholung desselben) auf der reellen Axe der z-Ebene entspricht, dem von 0 bis $-\infty$ in Z ein solcher von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$ in z, dem von 0 bis $+i$ in Z der von 0 bis ∞i in z, dem von 0 bis $-i$ in Z der von 0 bis $-\infty i$ in z. Der Weg von $+i$ nach $+\infty i$ in Z geht über in den verticalen Weg vom unendlichen Bereiche nach dem Punkte $\frac{\pi}{2}$ der z-Ebene, etc.

Demnach entspricht dem Einheitskreise der Z-Ebene ein unendlicher verticaler Flächenstreifen, z. B. der zwischen den Geraden $x = \pm\frac{\pi}{4}$ der z-Ebene liegende, der ganzen Z-Ebene, die von $+i$ nach $+\infty i$ und von $-i$ nach $-\infty i$ oder von $+i$ nach $-i$ aufgeschnitten zu denken ist. Der verticale Streifen zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$, mit andern Worten:

Die Function $Z = \tan z$ giebt den directen Zusammenhang zwischen der Mercatorprojection und derjenigen Ptolemäischen Projection, von der gewöhnlich nur ein Theil dargestellt ist, die östliche, oder die westliche Halbkugel.

Da $\frac{\partial \arctan Z}{\partial Z} = \frac{1}{1+Z^2}$ ist, was für $Z = \pm i$ unendlich gross wird, so sind die Punkte $\pm i$ der Z-Ebene die einzigen Verzweigungspunkte derselben. Die Linie von $+i$ nach $-i$, oder die von $+i$ nach $+\infty i$ und die von $-i$ nach $-\infty i$ geben den einzigen Verzweigungsschnitt. Die beiden Windungspunkte sind aber von unendlich hoher Ordnung, denn der Winkel 0 zwischen den Parallelen der z-Ebene wird für einen Streifen von Breite π derselben in den Winkel von 2π verwandelt.

Dass den Geraden $X = a$ und $Y = b$ der Z-Ebene die Curven

$$8) \quad \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} + 2 \cos 2x} = a \quad \text{resp.} \quad \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y} + 2 \cos 2x} = b$$

entsprechen, sei beiläufig erwähnt.

Mit Hilfe des Integrals

$$z = \int_0^Z \frac{dZ}{1+Z^2}$$

lässt auch diese Abbildung eine andere Behandlung zu. Vergl. Durège, Elliptische Functionen, Seite 370.

§ 100. Litteratur und Bemerkungen.

Siebeck giebt bereits im 55. Bande des Crelle'schen Journals Andeutungen über die Abbildung mittels der Kreisfunctionen. Die hierher gehörigen Riemann'schen Blätter werden bezüglich der Verzweigungspunkte in den genannten Lehrbüchern behandelt, jedoch wird die Art der Durchkreuzungen wohl nirgends mit der nöthigen Klarheit dargestellt. Unsere Darlegungen lassen keinen Zweifel übrig. Dieselben wurden bereits im 18. Bande der Zeitschrift für Mathem. und Physik und im Programm 1873 des Gymnasiums zu Elberfeld gegeben.

Sonst ist, wie überhaupt auf dem Gebiete der einfach periodischen Functionen, für die Theorie der isogonalen Verwandtschaften nur Weniges geschehen, obwohl besonders für die Theorie der freien Ausflussstrahlen im Anschluss an die 22. Vorlesung in Kirchhoff's „Mathematische Physik" noch viele interessante Beispiele abgeleitet werden können.

Nur eine weitergehende Abhandlung ist dem Verfasser bekannt geworden, wiederum ein Beispiel von Amstein, die Abbildung

$$Z = 1 - z + \lg z$$

behandelnd, durch welche Kreise und Cycloiden aufeinander abgebildet werden. Vergl. Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. XVI. 82, page 262.

Die vorigen Abschnitte werden gezeigt haben, dass die Schwierigkeiten durchaus nicht gross sind, obwohl von Constructionen mit Zirkel und Lineal abzusehen ist.

Oft kann man die eleganten Formeln der Goniometrie benutzen um algebraische Abbildungen in eigenthümlicher Weise zu behandeln. Soll z. B.

$$Z = 2z\sqrt{1 - z^2}$$

untersucht werden, so führe man eine Hilfsebene ζ durch die Gleichungen $Z = \sin 2\zeta$ und $z = \sin\zeta$ ein, was der obigen Beziehung entspricht. Ebenso liessen sich $Z = 3z - 4z^3$ durch $Z = \sin 3\zeta$ und $z = \sin\zeta$ vereinfachen. Man kann dann mit Hilfe des Gegebenen sofort eine Reihe von Sätzen für diese Art von Verwandschaften ablesen.

Fünfzehntes Capitel.

Abbildung mittels der elliptischen Functionen und ihrer Umkehrungen.

§ 101. Allgemeines über die Abbildungen $Z = \text{sin am } z$ und $z = \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(1 - Z^2)(1 - k^2 Z^2)}}$ für mod $k +$, reell und < 1.

Die Function $Z = \text{sin am } z$ gehört zu denen, bei welchen conjugirten Werthen des Arguments conjugirte der Function entsprechen (vergl. § 43), und zwar ist zugleich

1) $$X \pm Yi = \text{sin am}(x \pm yi) = \frac{\text{sin am } x \cos\text{am } yi \bigtriangleup \text{am } yi \pm \text{sin am } yi \cos\text{am } x \bigtriangleup \text{am } x}{1 - k^2 \text{sin}^2\text{am } x \,\text{sin}^2\text{am } yi},$$

so dass die Trennung des Reellen und Imaginären durch Addition und Subtraction folgendermassen geschieht:

2) $$X = \frac{\text{sin am}(x + yi) + \text{sin am}(x - yi)}{2} = \frac{\text{sin am } x \cos\text{am } yi \bigtriangleup \text{am } yi}{1 - k^2 \text{sin}^2\text{am } x \,\text{sin}^2\text{am } yi},$$

3) $$Y = \frac{\text{sin am}(x + yi) - \text{sin am}(x - yi)}{2i} = \frac{1}{i}\,\frac{\text{sin am } yi \cos\text{am } x \bigtriangleup \text{am } x}{1 - k^2 \text{sin}^2\text{am } x \,\text{sin}^2\text{am } yi}.$$

Die rechten Seiten von 2) und 3) gleich a resp. b gesetzt, geben die fundamentalen Isothermensysteme der z-Ebene, und genügen der partiellen Differentialgleichung $\triangle u = 0$. Damit ist auch gezeigt, welche Curven der z-Ebene den Curven $f(XY) = 0$ der anderen entsprechen. In welche Curven die Kreise und Geraden um resp.

durch den Nullpunkt der Z-Ebene übergehen, ergiebt sich aus den Gleichungen 1) durch Multiplication und Division, deren Resultat ist:

$$4) \qquad X^2 + Y^2 = \frac{\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} yi}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi},$$

$$5) \qquad \frac{Y}{X} = \frac{1}{i} \frac{\tan \operatorname{am} yi \triangle \operatorname{am} x}{\tan \operatorname{am} x \triangle \operatorname{am} yi}.$$

Einsetzung dieser Werthe in die Gleichungen $\lg R = c$ und $\arctan \frac{Y}{X} = \gamma$ giebt Curven, deren physikalische Bedeutung später erörtert werden soll.

In höherem Grade interessirt uns jetzt die Frage, was den Geraden $x = a$ und $y = b$ der z-Ebene entspricht, denn die periodische Eintheilung der letzteren wird dadurch in die Z-Ebene übertragen und der Zusammenhang der Blätter der letzteren wird klargelegt.

Die gewöhnliche Methode würde folgende sein: Aus den Gleichungen 1) folgt durch Umkehrung

$$6) \qquad x + yi = \int_0^{X+Yi} \frac{d(X+Yi)}{\sqrt{[1-(X+Yi)^2]\,[1-k^2(X+Yi)^2]}} = J_1,$$

und

$$7) \qquad x - yi = \int_0^{X-Yi} \frac{d(X-Yi)}{\sqrt{[1-(X-Yi)^2]\,[1-k^2(X-Yi)^2]}} = J_2.$$

Den Geraden $x = a$ und $y = b$ entsprechen also die Curvenschaaren

$$8) \qquad \frac{J_1 + J_2}{2} = a,$$

$$9) \qquad \frac{J_1 - J_2}{2i} = b,$$

deren linke Seiten wiederum der Differentialgleichung $\triangle u = o$ genügen. Dass den Curven $f(xy) = 0$ ganz allgemein Curven

$$10) \qquad f\left[\frac{J_1 + J_2}{2}, \frac{J_1 - J_2}{2i}\right] = 0$$

entsprechen, ist wiederum selbstverständlich.

Die Lösung der gestellten Aufgabe ist aber eine implicite. Eine explicite Lösung erhält man durch Elimination von x oder y aus den Gleichungen 2) und 3), die man auch mit 4) combiniren kann. Setzt man zur Abkürzung

$$\sin \operatorname{am} x = l, \quad \cos \operatorname{am} x = m, \quad \triangle \operatorname{am} x = n,$$
$$\sin \operatorname{am} yi = \lambda, \quad \cos \operatorname{am} yi = \mu, \quad \triangle \operatorname{am} yi = \nu,$$

so folgen aus Gleichung 4) die Relationen

$$l^2 = \frac{\lambda^2 + (X^2 + Y^2)}{1 + \varkappa^2\lambda^2(X^2 + Y^2)}, \qquad \lambda^2 = \frac{l^2 - (X^2 + Y^2)}{1 - k^2 l^2 (X^2 + Y^2)}$$

Benutzt man dieselben bei der Elimination, so ergeben sich Gleichungen, die sich auf folgende Form bringen lassen:

11) $$(X^2 + Y^2)^2 + (X^2 + Y^2)\frac{1 + \varkappa^2\lambda^4}{\varkappa^2\lambda^2} - X^2\frac{(1 - \varkappa^2\lambda^4)^2}{\varkappa^2\lambda^2\mu^2\nu^2} + \frac{1}{k^2} = 0,$$

12) $$(X^2 + Y^2)^2 - (X^2 + Y^2)\frac{1 + k^2 l^4}{k^2 l^2} + Y^2\frac{(1 - k^2 l^4)^2}{k^2 l^2 m^2 n^2} + \frac{1}{k^2} = 0.$$

Aus ihnen lassen sich die Symmetrieverhältnisse gegen beide Axen leicht entwickeln. Gleichung 11) enthält nur noch y, Gleichung 12) nur noch x. Setzt man nun $x = a$ und $y = b$, so werden auch $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, constant, und dasselbe gilt von den in beiden Gleichungen vorkommenden Factoren $\frac{1 + k^2 l^4}{\varkappa^2\lambda^2}$ u. s. w.

Nun hat die elliptische Function die reelle Periode*) $4K$ und die imaginäre Periode $2iK'$, wobei

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2\sin^2\varphi)}}$$

und $k'^2 = 1 - k^2$.

Aus Obigem ergiebt sich demnach Folgendes:

Sämmtlichen Geraden $x = a \pm 4nK$ *entspricht eine Curve* 4ten *Grades von der Form* 12), *sämmtlichen Geraden* $y = b \pm 2nK'$ *eine solche von der Form* 11).

Beide Systeme sind orthogonal und isothermisch, die isothermische Schreibweise, welche bereits durch 8) und 9) implicit gegeben ist, lässt sich erreichen, indem man z. B. in 11) $1 - \lambda^2$ für μ^2, $1 - \varkappa^2\lambda^2$ für ν^2 einsetzt, und λ aus der Gleichung berechnet, wodurch man auch y explicit erhält.

Setzt man

$$\frac{1 + k^2 l^4}{k^2 l^2} = A_x, \quad \frac{(1 - k^2 l^4)^2}{k^2 l^2 m^2 n^2} = B_x, \quad \frac{1 + \varkappa^2\lambda^4}{\varkappa^2\lambda^2} = A_y, \quad \frac{(1 - \varkappa^2\lambda^4)^2}{\varkappa^2\lambda^2\mu^2\nu^2} = B_y,$$

so lauten die Gleichungen in Polarcoordinaten

*) Ueber die Berechnung von K mittels des Productes $K = \frac{\pi}{2}(1 + k_0)(1 + k_1)(1 + k_2)\ldots$ sehe man z. B. Durège, elliptische Functionen, Abschnitt XI. Ebendaselbst ist die Berechnung der Integrale erörtert.

13) $$R^4 + A_y R^2 - B_y R^2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{k^2} = 0,$$

14) $$R^4 - A_x R^2 + B_x R^2 \sin^2\vartheta + \frac{1}{k^2} = 0.$$

Setzt man in 13) $\lambda = \frac{i}{\sqrt{k}}$, wodurch B_y verschwindet und $A_y = -\frac{2}{k}$ wird, so geht sie über in

15) $$R = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Da ferner

$$\text{sin am}\left(\pm\frac{iK'}{2}\right) = \pm\frac{i}{\sqrt{k}}$$

ist, so folgt, *dass den Parallelen* $y = \pm\frac{2n+1}{2}K'$ *der z-Ebene ein Kreis mit dem Radius* $\frac{1}{\sqrt{k}}$ *entspricht, gegen welchen Reciprocität stattfindet.* Man vergleiche dazu § 44, II. Betrachtet man den Kreis als Einheitskreis, was man durch die Transformation $\mathbf{R} = R\sqrt{k}$ erreicht, so kann man in der That die Gleichungen 13) und 14) leicht auf die Form

$$\mathbf{R}^2 + C_y - D_y \cos^2\vartheta + \frac{1}{\mathbf{R}^2} = 0,$$

$$\mathbf{R}^2 - C_x + D_x \sin^2\vartheta + \frac{1}{\mathbf{R}^2} = 0$$

bringen, in der sie die reciproke Gestalt angenommen haben. [Der Reciprocität gegen den Kreis entsprechen Symmetrieverhältnisse innerhalb des Periodenparallelogramms.]

Setzt man ebenso in Gleichung 12)

$$l = \pm\frac{1}{\sqrt{1+k}} = \text{sin am}\left(\pm\frac{2n+1}{2}K\right)$$

ein, so reducirt sie sich nach einigen Umformungen auf

16) $$(X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2)\frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^2} = 0,$$

d. h. *auf die Gleichung einer Lemniscate, die den Kreis* 15) *orthogonal schneidet. Dieselbe entspricht also allen Linien* $x = \pm\frac{2n+1}{2}K$.

Man untersuche noch die Specialfälle $x = \pm K$, $x = \pm 2K$, $y = 0$, $y = \pm K'$, d. h. $l = \pm 1$, $l = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$. Das Resultat ist folgendes: Sämmtlichen Linien $y = \pm 2nK'$ entspricht ein unendlich oft wiederholter geradliniger Hin- und Rückweg zwischen den Punkten ± 1, sämmtlichen Linien $x = (1 \pm 4n)K$ ebenso die Gerade zwischen $+1$ und $\frac{1}{k}$, den Geraden $x = -(1 \pm 4n)K$

die Gerade von -1 nach $-\frac{1}{k}$, den Parallelen $x = \pm 4nK$ die ganze Y-Axe, den Geraden $\pm(2n+1)K'$ die reelle Axe von $+\frac{1}{k}$ nach ∞ und von $-\infty$ nach $-\frac{1}{k}$.

Fig. 61a stellt alle speciell besprochenen Geraden der s-Ebene und 61b die zugehörigen Geraden, den Kreis 15) und die Lemniscate 16) der Z-Ebene dar. Dies reicht hin, um die Riemann'schen Flächen der letzteren derart in Zusammenhang zu setzen, dass die Beziehung zwischen beiden Ebenen eindeutig wird.

Das gesammte Periodenrechteck $aa_2a_3a_1$ enthält jeden Buchstaben doppelt, d. h. es entspricht einem Doppelblatte der Z-Ebene, welches durch die drei Verzweigungsschnitte von $+1$ bis $+\frac{1}{k}$, von $\frac{1}{k}$ über $+\infty$ und von $-\infty$ bis $-\frac{1}{k}$, endlich von $-\frac{1}{k}$ bis -1 in seinen Schichten und mit den benachbarten der übrigen Doppelblätter, deren Zahl unendlich gross 2ter Ordnung ist, zusammenhängt. Dass die genannten Punkte singuläre, und dass ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ Verzweigungspunkte sind, folgt aus dem Differentialquotienten

$$Z' = \cos \operatorname{am} s \,\Delta \operatorname{am} s = \sqrt{1 - Z^2}\sqrt{1 - k^2 Z^2},$$

welcher für $Z = \pm 1$ und $\pm\frac{1}{k}$ verschwindet, für $Z = \infty$ unendlich gross ist. In den Verzweigungspunkten treten, wie die Figur zeigt, Winkeländerungen im Verhältnisse $1:2$ ein, da die Ecken des halben Rechtecks in der Z-Ebene gestreckt wiedergegeben werden, während die Stellen e und f von 180^0 auf 360^0 gebracht werden. Bezüglich des Zusammenhangs der Blätter der Z-Ebene machen wir folgende Annahmen:

a) Die Schichten jedes Doppelblattes haben keine anderen Blätter zwischen sich. Sie gehen längs des Schnittes $\overline{be}$ in einander über, so dass der Punkt e für jedes Doppelblatt ein Windungspunkt 1ter Ordnung im gewöhnlichen Sinne ist. Bei b ist das Verhalten complicirter, weil dort ein zweiter Schnitt hinzutritt.

b) Jedem Horizontalstreifen der s-Ebene von der Breite $2K'$ entsprechen unendlich viele Doppelblätter der Z-Ebene. Zwischen ihnen sollen keine zu anderen Horizontalstreifen gehörigen Schichten liegen. Je weiter nach rechts die Periodenrechtecke liegen, um so tiefer sollen die Doppelblätter einer solchen Gruppe sich befinden. Sie gehen in einander über längs der doppelt zu denkenden Linie af, und zwar hängt dort stets die untere Schicht eines Doppelblattes mit der oberen des nächsten tiefer liegenden Doppelblattes zusammen.

c) Je tiefer ein Horizontalstreifen der z-Ebene sich befindet, um so tiefer soll sich die zu ihm gehörige Gruppe von Doppelblättern befinden. Hat ein Streifen in der Richtung nach rechts die vollständigen Periodenrechtecke I, II, III ..., denen also die Schichten I_0, I_u, II_0, II_u, III_0, III_u ... der Z-Ebene entsprechen, so soll der nächste darunter befindliche Horizontalstreifen die Rechtecke 1, 2, 3 ... senkrecht unter den vorigen gleichzahligen besitzen, so dass die nächste Blättergruppe der Z-Ebene entsprechend die Schichten 1_0, 1_u, 2_0, 2_u, 3_0, 3_u ... hat.

Dadurch ist das Verhalten der übrigen Windungspunkte klar gelegt. Umkreist man z. B. den Punkt a der z-Ebene auf kleinem Kreise einmal, und zwar links drehend, so umkreist man entsprechend den Punkt a der Z-Ebene, wenn man von II_0 ausgeht, mit folgendem je zwei Umläufe erfordernden Turnus:

$$II_0 I_u 1_u 2_0 \quad II_0 I_u 1_u 2_0 \ldots .$$

In Fig. 61 a b ist dieses Verhalten angedeutet, in Fig. 61 c schematisch dargestellt. In letzterer Zeichnung sind zwischen den gezeichneten Blättern noch unendlich viele der beiden Hauptgruppen zu denken. Der Turnus bei a_2 würde sein

$$III_0 II_u 2_u 3_0 \quad III_0 II_u 2_u 3_0 \ldots .$$

Aehnlich ist das Verhalten bei a_1 und a_3, nur ist dort die nächst höhere Hauptgruppe mit der behandelten zu verbinden. Für alle so zusammenhängenden Blätter hat man also Windungspunkte 1ter Ordnung.

Der Punkt b der z-Ebene veranlasst in gleicher Weise folgenden Cyclus:

$$II_u II_0 2_0 2_u \quad II_u II_0 2_0 2_u \ldots ,$$

der Punkt f der z-Ebene folgenden:

$$II_0 I_u \quad II_0 I_u \ldots .$$

So ist das Verhalten in allen kritischen Punkten geklärt. Die in der z-Ebene mit ∞ bezeichneten sind nur insofern singulär, als das Vergrösserungsverhältniss nach der Z-Ebene hin $1 : \infty$ ist. Winkeländerungen treten in ihnen nicht ein.

Schlägt man Wege ein, die zwei Verzweigungspunkte einschliessen, folgt man z. B. dem in 60 b gezeichneten lemniscatischen Ovale, welches übrigens durch die Punkte $\frac{1}{\sqrt{1+k}}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-k}}$ geht, so erhält man keinen Cyclus, sondern man gelangt durch unendlich viele Blätter, z. B.

$I_0 1_0 \ldots$ (durch die Oberschichten aller gleichzahligen) ·
oder
$1_u I_u \ldots$ (durch die Unterschichten in entgegengesetzter Richtung).

Bewegung auf dem Kreise hingegen giebt

$$I_0 I_u II_0 II_u III_0 III_u \ldots .$$

Damit ist das gegenseitige Entsprechen beider Ebenen vollkommen bestimmt und eindeutig geworden.

Ueber die vom Integrale ausgehende Behandlung des Gegenstandes vergleiche man die Functionentheorie von Durège, Abschnitt X. § 57. 4.

Die Eintheilung der Z-Ebene in „kleine Rechtecke" erhält man, wenn man in $x = a$ und $y = b$ arithmetische Werthreihen für die rechten Seiten einführt. Zu den Gleichungen 8) und 9) ist keine weitere Bemerkung nöthig, bei 11) und 12) aber hat man in $l = \sin \operatorname{am} x$, $m = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} x}$ etc. arithmetische Werthfolgen für x resp. y zu setzen.

Die Eintheilung giebt in den verschiedenen Blättern unter gewissen Bedingungen sich deckende Zeichnungen, besonders dann, wenn man in $x = 0, a, 2a, 3a, \ldots, y = 0, b, 2b, 3b \ldots$ $a = \frac{K}{2n}$, $b = \frac{K'}{2n}$ setzt. Die Diagonalpunkte der Rechtecke geben dann in der Z-Ebene solche isogonale Trajectorien, die in allen Blättern sich decken. In der z-Ebene ist die Neigung der entsprechenden Geraden

$$17) \qquad \gamma = \pm \arctan \frac{K'}{K} .$$

Alle anderen Parallelenschaaren passiren mehrere halbe Periodenrechtecke in verschiedener Weise, ehe sich ein periodisches Verhalten zeigt, die entsprechenden Curven schliessen also erst nach mehreren Umgängen. Ist die Tangente des Schnittwinkels irrational, so wiederholt sich das Verhalten gegen das betreffende Rechteck nie, so dass die entsprechenden Curven gar nicht schliessen, sondern in unendlich häufigen Windungen verlaufen. Für gewisse Periodenverhältnisse sind die durch Gleichung 17) charakterisirten Trajectorien *algebraische* Curven. Neben den Diagonalcurven des halben Periodenrechtecks sind noch die des ganzen Rechtecks, für welche

$$18) \qquad \gamma = \pm \arctan \frac{K'}{2K},$$

von verhältnissmässiger Einfachheit.

Die implicite Lösung der Aufgabe, die Gleichung der allgemeinen isogonalen Trajectorien der sin am-Curven zu finden, ist schon im

Obigen enthalten, denn die Gleichung der schrägen Geraden $y - Ax = b$ geht über in

$$19) \qquad \frac{J_1 - J_2}{2i} - A\,\frac{J_1 + J_2}{2} = b,$$

wo J_1 und J_2 die Bedeutung 6) resp. 7) haben. Offenbar genügt sie der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. Setzt man für A den Werth $\pm\frac{K'}{K}$ resp. $\pm\frac{K'}{2K}$, so erhält man die Curven, deren Schnittwinkel durch die Diagonale des halben resp. ganzen Periodenrechtecks bestimmt wird. $A = 1$ giebt die Trajectorien zu 45^0, welche für die Periodenverhältnisse $\frac{K'}{K} = 1$ und $\frac{K'}{K} = 1$ mit den Diagonalcurven zusammenfallen.

Ist $\tan\varphi = \frac{K'}{K}$ resp. $\frac{K'}{2K}$, so folgt $\cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{K + iK'}{\sqrt{K^2 + K'^2}}$ resp. $= \frac{2K + iK'}{\sqrt{4K^2 + iK'^2}}$. Demnach kann man die Diagonalcurven des halben und ganzen Rechtecks auch mittelst der Abbildung

$$20) \quad Z = \text{sin am}\left[z \cdot \frac{K + iK'}{\sqrt{K^2 + K'^2}}\right] \text{ resp. } Z = \text{sin am}\left[z \cdot \frac{2K + iK'}{\sqrt{4K^2 + iK'^2}}\right]$$

finden. Ihre *symmetrischen* und *reciproken* Eigenschaften lassen sich aus denen der Geraden im Rechteck ablesen. Wir kommen hierauf noch einmal zurück.

§ 102. Die sin am-Curven und ihre physikalische Bedeutung.

Fig. 62 stellt das System der sin am-Curven mod $k = (3 - \sqrt{8})$ dar, welche bei der Abbildung eines Rechtecks, dessen Höhe das Doppelte der Basis ist, auf die ganze einfache Ebene auftreten, wobei jedoch in der letzteren die genannten Verzweigungsschnitte vorhanden sind. Es handelt sich also um das Periodenverhältniss $\frac{K'}{2K} = 1$.

Dass dies der Fall ist, lehrt folgende Ueberlegung: Bei dem einfachsten Falle $K' = K$ ist $k' = k$, also, da $k^2 + k'^2 = 1$ ist, $k = \sqrt{\frac{1}{2}} = k'$. Durège berechnet auf Seite 196 des Lehrbuchs über elliptische Functionen für diesen Fall $K = 1{,}8540747$.

Mit Hülfe der Landen'schen Transformation (vergleiche Abschnitt XI des genannten Lehrbuchs oder Seite 96 der Fundamenta nova etc. von Jacobi) geht man von der Periodenzahl K über zu einer anderen K_0, wobei $K_0(1 + k_0) = K$ ist, von K' gleichzeitig zu K'_0, wobei $\frac{K'_0(1 + k_0)}{2} = K'$ ist. Vom Periodenverhältniss $\frac{K'}{K}$

also geht man über zum Verhältniss $\frac{K'_0}{2K_0}$, also z. B. von $\frac{K'}{K} = 1$, wobei das halbe Periodenrechteck ein Quadrat ist, zu dem Falle, wo seine Höhe das Doppelte der Basis ist. Gleichzeitig geschieht aber der Uebergang vom Modul k zu k_0, wobei $k_0 = \frac{1-k'}{1+k'}$, also im vorliegenden Falle $k_0 = \frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}} = (3-\sqrt{8})$ ist. Die Periodenzahl $K_0 = \frac{K}{1+k_0} = \frac{1{,}8540747}{4-\sqrt{8}}$ ist nun leicht zu berechnen, ebenso $K'_0 = 2K_0$.

In gleich einfacher Weise kann man nun zum Rechteck von 4facher, 8facher, 16facher etc. Höhe übergehen. In umgekehrter Reihe erhält man Rechtecke von $\frac{1}{2}$facher, $\frac{1}{4}$facher, $\frac{1}{8}$facher etc. Höhe.

Damit sind diejenigen Fälle der sin am-Curven erledigt, welche sich am einfachsten berechnen lassen, jedoch auch die übrigen Fälle für $k+$, reell und < 1 machen keine wesentlichen Schwierigkeiten.

Die physikalische Bedeutung dieser Curvenschaaren ist folgende:

a) Zwei gleiche Stücke einer Geraden, z. B. AB und CD in Fig. 62 mögen entgegengesetzte Elektroden einer unbegrenzten Platte sein. Dann sind die gezeichneten Curven Spannungs- und Stromcurven*).

b) Nimmt man das Stück BC als die eine, die unbegrenzten Aussenstücke von D bis $+\infty$ und von D bis $-\infty$ als die andere Elektrode, so vertauschen beide Gruppen ihre Bedeutung.

c) Der Hauptkreis der Figur sei die eine Electrode, die Gerade BC die andere, dann hat man im Wesentlichen den Fall b. Dasselbe ist der Fall, wenn statt BC wieder die genannten Aussenstücke genommen werden.

d) Endlich ist durch Fig. 62 noch der Zustand einer Kreisplatte erledigt, in welche längs BE Electricität einströmt, längs CF abgeleitet wird; ebenso der des Aussentheils, wenn AB Einströmung, DF Ausströmung giebt.

[Gleichzeitig sei hier erörtert, dass die durch Gleichung 4) und 5) gegebenen Curven des § 101,

---

*) Eine wohlgelungene experimentelle Wiedergabe der Figur 62 für diesen Fall hat mir Herr Guébhard zugesandt. Die Uebereinstimmung zwischen den Curven der Originalfigur (grösseres Format als 62) und den Nobili'schen Farbenringen ist eine ausserordentlich grosse.

21) $$\frac{1}{2}\lg\frac{\sin^2\operatorname{am} x-\sin^2\operatorname{am} yi}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} x\sin^2\operatorname{am} yi}=c$$

und $$\arctan\frac{1}{i}\frac{\tan\operatorname{am} yi\triangle\operatorname{am} x}{\tan\operatorname{am} x\triangle\operatorname{am} yi}=\gamma$$

die Spannungs- und Stromlinien für den Fall darstellen, dass in das ausgeschnittene Rechteck *abef* der Fig. 61a bei ∞ und 0 Electricität ein- resp. ausströmt. Für $k=3-\sqrt{8}$ hat man, wie in der Figur, den Fall eines Quadrates. Die zweite Deutung führe der Leser durch.]

Wärmetheoretische und hydrodynamische Anwendungen lassen sich leicht anschliessen.

Siebeck behandelt im 57ten Bande des Crelle'schen Journals die sinam-Curven mit Hülfe der elliptischen Coordinaten, wobei sich die Gleichungen in grösserer Einfachheit darstellen.

Legt man die Brennpunkte ± 1 der Z-Ebene zu Grunde, so sind die Quadrate der Radii vectores, wie wir wissen,

$$P^2=(X+1)^2+Y^2=(X+Yi+1)(X-Yi+1)$$
$$Q^2=(X-1)^2+Y^2=(X+Yi-1)(X-Yi-1).$$

Führt man die Transformation $Z=\sin\operatorname{am} s$ durch, so erhält man demnach als Beziehungen zwischen beiden Ebenen

$$P^2=[1+\sin\operatorname{am}(x+yi)][1+\sin\operatorname{am}(x-yi)]$$
$$=\frac{(\sin\operatorname{am} x\triangle\operatorname{am} yi+\cos\operatorname{am} yi)^2}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} x\sin^2\operatorname{am} yi},$$
$$Q^2=[1-\sin\operatorname{am}(x+yi)][1-\sin\operatorname{am}(x-yi)]$$
$$=\frac{(\sin\operatorname{am} x\triangle\operatorname{am} yi-\cos\operatorname{am} yi)^2}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} x\sin^2\operatorname{am} yi},$$

also

22) $$P+Q=\frac{2\sin\operatorname{am} x\triangle\operatorname{am} yi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} x\sin^2\operatorname{am} yi}},$$
$$P-Q=\frac{2\cos\operatorname{am} yi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} x\sin^2\operatorname{am} yi}},$$

so dass man leicht sagen kann, was für Curven der s-Ebene den Curven

$$f[(P+Q),\ (P-Q)]=0$$

der Z-Ebene entsprechen. So sind z. B. die Gleichungen leicht in die isothermische Form der Curvengleichungen umzuwandeln, welche den confocalen Ellipsen und Hyperbeln der Z-Ebene in der andern entsprechen.

Eliminirt man aber aus beiden Gleichungen x resp. y, so erhält man an Stelle der Gleichungen 11) und 12) des § 101 folgende einfacheren:

23) $$\frac{(P-Q)^2}{\cos^2 \operatorname{am} yi} - \frac{(P+Q)^2 k^2 \cos^2 \operatorname{co\,am} yi}{k'^2} = 4,$$

oder

23*) $\cos^2 \operatorname{co\,am}(y, k')\,(P+Q)^2 + \cos^2 \operatorname{am}(y, k')\,(P-Q)^2 = 4$

und

24) $$\frac{(P+Q)^2}{\cos^2 \operatorname{co\,am} x} - \frac{(P-Q)^2 k^2 \cos^2 \operatorname{am} x}{k'^2} = 4.$$

[Aus diesen Gleichungen kann man $\sin \operatorname{am} x$ mit Hülfe quadratischer Gleichung leicht berechnen, so dass

$$\sin \operatorname{am} x = f[(P+Q),\ (P-Q)] = \Psi$$

sein mag, also

$$x = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\psi^2)\,(1-k^2\psi^2)}}.$$

Würde man in diese Gleichung Cartesische Coordinaten einführen, so hätte man die isothermische Schreibweise der sinam-Curven.]

Die Brennpunkte $\pm \frac{1}{\varkappa}$ sind gleichberechtigt mit ± 1. Wir wollen die Gleichungen derselben Curven in elliptischen Coordinaten mit den Brennpunkten $\pm \frac{1}{\varkappa}$ darstellen. Der entsprechende Gang ist bei analoger Bezeichnung folgender.

$$Q_1^2 = \left[\frac{1}{\varkappa} - \sin \operatorname{am}(x+yi)\right] \cdot \left[\frac{1}{\varkappa} - \sin \operatorname{am}(x-yi)\right]$$
$$= \frac{(\triangle \operatorname{am} yi - \varkappa \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} yi)^2}{\varkappa^2 (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi}$$

$$P_1^2 = \left[\frac{1}{\varkappa} + \sin \operatorname{am}(x+yi)\right] \cdot \left[\frac{1}{\varkappa} + \sin \operatorname{am}(x-yi)\right]$$
$$= \frac{(\triangle \operatorname{am} yi + \varkappa \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} yi)^2}{\varkappa^2 (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi)},$$

folglich

$$P_1 + Q_1 = S_1 = \frac{2 \triangle \operatorname{am} yi}{\varkappa \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi)}},$$

$$P_1 - Q_1 = D_1 = \frac{2 \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} yi}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi)}}.$$

Elimination von x führt auf die Gleichung

25) $$\frac{\varkappa^2 S_1^2}{\triangle^2 \operatorname{am} yi} - \varkappa^2 D_1^2 \tan^2 \operatorname{am} yi = 4$$

oder

25*) $\varkappa^2 S_1^2 \sin^2 \operatorname{co\,am}(y\varkappa') + \varkappa^2 D_1^2 \sin^2 \operatorname{am}(y\varkappa') = 4.$

Elimination von yi führt auf

26) $$\frac{\varkappa^2 S_1^2 \triangle^2 \operatorname{am} x}{\varkappa'^2} - \frac{\varkappa^2 D_1^2}{\varkappa'^2 \tan^2 \operatorname{am} x} = 4.$$

Betrachtet man die Strecken $\frac{1}{\varkappa}$ als Einheit, so verändern sich diese Gleichungen nur insofern, als der Factor $\varkappa^2$ einfach wegfällt.

Die Gleichungen des § 15 gestatten, auch Radii vectores hereinzuziehen, die vom Nullpunkte ausgehen. Betrachtet man nämlich den Kreis der Fig. 62 als Einheit, die Entfernung OC als e, so geht durch Inversion jeder von C ausgehende Radius vector P über in den auf O und D bezüglichen Ausdruck $\frac{P_1}{R} e$, ebenso Q, von B ausgehend, in $\frac{Q_1}{R} e$. Die Gleichungen 23) und 24) verwandeln sich also, wenn sie in der Form

$$24^*) \qquad c^2 (P + Q)^2 + \partial^2 (P - Q)^2 = 4$$

geschrieben werden, in

$$26^*) \qquad c^2 (P_1 + Q_1)^2 + \partial^2 (P_1 - Q_1)^2 = \frac{4}{e} R^2,$$

und diese Gleichung bedeutet dieselben Curvenschaaren wieder, jedoch auf *drei* Radii vectores bezogen.

Schreibt man ferner 25) und 26) in der Form

$$c_1^2 (P_1 + Q_1)^2 + \partial_1^2 (P_1 - Q_1)^2 = 4,$$

so kann man die linke Seite mit der von 24*) gleich setzen, was Gleichungen mit 4 Radii vectores giebt, die bei der Inversion in sich selbst übergehen.

Bezüglich des speciellen Falles $\varkappa = 3 - \sqrt{8}$ sei darauf aufmerksam gemacht, dass, wie Fig. 62 angiebt, zu den Trajectorien zu 45^0 der sin am-Curven zwei Kreise gehören, die durch die Punkte $\frac{1}{\varkappa}, -1, \pm \frac{i}{\sqrt{\varkappa}}$ resp. $-\frac{1}{\varkappa}, +1, \pm \frac{i}{\sqrt{\varkappa}}$ gehen. Gegen diese Kreise findet Reciprocität der beiden Gruppen unter einander statt. Zu diesem Falle lässt sich also, wie es soeben geschah, eine neue Gleichung, die sich auf den Mittelpunkt eines dieser Kreise und zweier Brennpunkte der *verschiedenen* Gruppen bezieht, aufstellen.

Von ganz besonderem Interesse ist folgender Satz: *Die sin am-Curven sind die stereographischen Projectionen zweier orthogonaler Schaaren sphärischer Kegelschnitte.*

In § 6 meiner Abhandlung „Ueber die logarithmische Abbildung" im 16. Bande der Zeitschr. für Mathem. und Physik, 1871, bewies ich dies durch folgende Ueberlegung: Schering hat in der Preisschrift, welche auf Seite 4 citirt ist, die Aufgabe gelöst, die Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids conform auf die Ebene zu übertragen. Derjenigen Abbildung, bei welcher jeder Octant auf ein *bestimmtes* Rechteck übertragen wird, so dass den Endpunkten der drei Axen und dem zugehörigen Nabelpunkte die Ecken des Recht-

ecks entsprechen, widmet er eine besondere Betrachtung und zeigt, dass den beiden Schaaren von Krümmungslinien des Ellipsoids die Parallelen zu den Seiten des Rechtecks entsprechen. Auf das Wesen der Curvenschaaren, welche bei der Abbildung auf die ganze Ebene den Krümmungslinien entsprechen, geht er aber nicht ein.

Betrachtet man aber die Kugel als Specialfall des Ellipsoids, so kann man zwei *beliebige* Punkte und ihre Diametralpunkte zu Nabelpunkten wählen, wobei die Krümmungslinien in sphärische Kegelschnitte übergehen. Demnach wird nach der Methode von Schering-Jacobi auch die Kugeloberfläche auf das Rechteck so übertragen, dass die Octanten den Theilen des Rechtecks ebenso, wie oben, entsprechen, nur ist jetzt das Rechteck *willkürlich*, da die Nabelpunkte willkürliche Lage haben. Den Parallelen zu den Rechtecksseiten entspricht also dabei eine Doppelschaar sphärischer Kegelschnitte.

Projicirt man aber diese letzteren stereographisch von dem Halbirungspunkte des Bogens zwischen zwei Nabelpunkten aus auf die Ebene, so hat man unsere Abbildung des Rechtecks auf die ganze Ebene mittels der Function $Z = \sin\operatorname{am} z$, folglich sind die sin am-Curven die stereographischen Projectionen der Doppelschaar sphärischer Kegelschnitte.

Die Folgerungen für die Abbildung des Ellipsoids auf Kugel und Ebene lege sich der Leser selbst zurecht, ebenso die physikalischen Deutungen für jene beiden Oberflächen und die zugehörigen Curvenschaaren.

In der oben genannten Abhandlung ist das Resultat auch noch auf dem Wege einfacher Rechnung bewiesen worden.

§ 103. Die Abbildungen $Z = \cos\operatorname{am} z$ und $Z = \triangle\operatorname{am} z$ und ihr Zusammenhang mit $Z = \sin\operatorname{am} z$.

$Z = \cos\operatorname{am} z$ und $Z = \sin\operatorname{am} z$ lassen sich genau ebenso behandeln, wie $Z = \sin\operatorname{am} z$, sowohl mit Hülfe des Additionstheorems, als auch unter Zuhülfenahme elliptischer Coordinaten. Beides sei dem Leser als Uebungsbeispiel überlassen, während hier mit den Hülfsabbildungen $Z = \sqrt{1 - z^2}$ und $Z = \sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}$ operirt werden soll.

Man würde z. B. die Gleichungen der Curven, welche bei der Abbildung $Z = \cos\operatorname{am} z$ den Parallelen zu beiden Axen entsprechen, in lemniscatischen Coordinaten sofort erhalten, wenn man in den Gleichungen 13) und 14) des § 101 $p \cdot p_1$ an Stelle von R^2, und $(\varphi + \varphi_1)$ an Stelle von 2ϑ setzte.

Ebenso leicht ergeben sie sich, wenn man in den Gleichungen 23) und 24) von § 102 $4 - D^2$ an Stelle von D^2 setzt. Vergl. § 59.

Geometrisch lassen sie sich aus den sin am-Curven construiren durch Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel unter Zugrundelegung des Systems confocaler Kegelschnitte um ± 1.

Die Brennpunkte der cos am-Curven sind ± 1 und $\pm \frac{\varkappa'}{\varkappa} i$, denn für die entsprechenden Werthe des Arguments verschwindet der Differentialquotient von cos am z.

Der Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, der bei den sin am-Curven auftrat, verwandelt sich in die Lemniscate $p \cdot p_1 = \frac{1}{\varkappa}$ mit den Brennpunkten ± 1, die Lemniscate mit den Brennpunkten $\pm \frac{1}{\varkappa}$ verwandelt sich nach den Resultaten des § 59 in eine Lemniscate mit den Brennpunkten $\pm i \frac{\varkappa'}{\varkappa}$, welche durch die Punkte $\pm \sqrt{\frac{\varkappa'}{1+\varkappa'}}$ und $\pm i \sqrt{\frac{\varkappa'}{1-\varkappa'}}$ geht.

Es gilt demnach folgender Satz:

Bei der Abbildung $Z = \operatorname{cos\,am}\, z$ entspricht stets den Linien $y = \frac{2n+1}{2} K'$ eine Lemniscate mit den Brennpunkten ± 1, welche durch die Punkte $\pm \sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}$ und $\pm i \sqrt{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}$ geht; den Linien $x = \frac{2n \pm 1}{2} K$ eine Lemniscate mit den Brennpunkten $\pm i \frac{\varkappa'}{\varkappa}$, welche durch die Punkte $\pm \sqrt{\frac{\varkappa'}{1+\varkappa'}}$ und $\pm i \sqrt{\frac{\varkappa'}{1-\varkappa'}}$ geht.

Durch Vertauschung von D^2 mit $4 - D^2$ geht Gleichung 24) des § 102 nach einigen Umformungen über in

$$27) \qquad \frac{S^2}{\sin^2 \operatorname{am} x} + D^2 \cdot \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{co\,am}\, x = 4.$$

Verwandelt man das Argument x in $u = K - x$, so geht die Gleichung über in

$$27^*) \qquad \frac{S^2}{\sin^2 \operatorname{co\,am}\, u} + D^2 \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}\, u = 4,$$

und dies ist die Form, in welcher sie Siebeck nach seiner Methode findet.

Durch dieselbe Operation geht Gleichung 23) über in

$$28) \qquad \frac{D^2}{\sin^2 \operatorname{am}\, yi} + S^2 \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{co\,am}\, yi = 4.$$

Verwandelt man hier das Argument yi in $v = yi \pm K$, so entsteht die Gleichung

$$28^*) \qquad D^2 \triangle^2 \operatorname{am}(vx') - S^2 x^2 \tan^2 \operatorname{am}(vx') = 4,$$

was ebenfalls mit dem Siebeck'schen Resultate übereinstimmt. Ebenso würde man von Gleichung 23*) gelangen auf

$$29) \qquad \frac{x^2 S^2}{\triangle^2 \operatorname{am}(yx')} - \frac{D^2}{\tan^2 \operatorname{am}(yx')} = 4,$$

wo die Vertauschung des Arguments y mit $y \pm iK$ auf Gleichung 27*) zurückführen würde.

Die Verschiebung des Coordinatensystems um $\pm K$ ist hier überhaupt oft von Vortheil, da $\cos \operatorname{am}(\pm K) = 0$ ist und demnach durch jene Veränderung ein günstigeres Entsprechen beider Ebenen herbeigeführt wird.

Auch bei dieser Abbildung handelt es sich um doppelt unendlich viele Blätter, deren jedes aus zwei Schichten besteht. Schnitte und Durchkreuzungen lassen sich in ähnlicher Weise, wie oben, feststellen.

Fig. 63 stellt die cos am-Curven für mod $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ dar. Dieselben sind die isogonalen Trajectorien zu 45° eines gewissen Systems von stereographischen Projectionen sphärischer Kegelschnitte, worauf wir noch zurückkommen. Zu ihren Trajectorien zu 45° gehört im vorliegenden Falle der Einheitskreis, gegen welchen Reciprocität stattfindet. Vergl. § 44, III. Die beiden hier auftretenden Lemniscaten sind congruent und schneiden sich auf dem Einheitskreise.

Die Gleichungen lassen sich für diesen Specialfall schreiben:

$$\left.\begin{aligned} (P+Q)^2 \frac{2-l^2}{1-l^2} + (P-Q)^2 l^2 &= 8 \\ (P+Q)^2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} + (P-Q)^2 (2-\lambda^2) &= 8 \end{aligned}\right\} \bmod \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

in Polarcoordinaten hingegen:

$$(R^2+1)\frac{2-l^4}{1-l^2} + \frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\sqrt{(R^2+1)^2 - 4R^2\cos^2\varphi} = 4$$

$$(R^2+1)\frac{4\lambda^2-\lambda^4-2}{\lambda^2-1} + \frac{\lambda^4-2\lambda^2+2}{\lambda^2-1}\sqrt{(R^2+1)^2 - 4R^2\cos^2\varphi} = 4.$$

In diesem Falle findet nicht nur Reciprocität beider Systeme unter einander gegen den Einheitskreis statt, welche man durch Einsetzung von $\frac{1}{R}$ statt R in die letzten Gleichungen erkennt, die dadurch in einander übergeführt werden, sondern auch Symmetrie gegen die Linien $\pm 45^0$ durch Null.

Die physikalische Bedeutung der cos am-Curven ist die, dass sie als Spannungs- und Stromlinien auftreten, wenn das Stück CD der Geraden in Fig. 63 die eine, die beiden zu ihr orthogonalen Stücke B bis $+\infty$ und A bis $-\infty$ die andere Electrode darstellen*). Aehnlich ist es bei den anderen Deutungen.

Auf die Abbildung $Z = \Delta \operatorname{am} z$ gelangen wir, wenn wir die Ebene $Z = \sin \operatorname{am} z$ der Transformation $Z = \sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}$ unterwerfen. $Z = \varkappa z$ verwandelt zunächst die Strecke $\frac{1}{\varkappa}$ in die Einheit. Dadurch gehen die Gleichungen 25), 25*) und 26) des § 101 über in folgende:

$$30) \qquad \frac{S^2}{\Delta^2 \operatorname{am} yi} - D^2 \tan^2 \operatorname{am} yi = 4$$

oder

$$30^*) \qquad S^2 \sin^2 \operatorname{co\,am}(y\varkappa') + D^2 \sin^2 \operatorname{am}(y\varkappa') = 4,$$

$$31) \qquad \frac{S^2 \Delta^2 \operatorname{am} x}{\varkappa'^2} - \frac{D^2}{\varkappa'^2 \tan^2 \operatorname{am} x} = 4.$$

Setzt man $4 - D^2$ an Stelle von D^2, so geht Gleichung 30*), resp. 31) über in

$$32) \qquad \frac{S^2}{\Delta^2 \operatorname{am}(y\varkappa')} - D^2 \tan^2 \operatorname{am}(y\varkappa') = 4,$$

$$33) \qquad S^2 \sin^2 \operatorname{am} x + D^2 \sin^2 \operatorname{co\,am} x = 4.$$

Gleichung 32) entspricht den Parallelen zur x-Axe, Gleichung 33) den Parallelen zur y-Axe. Durch die Transformation $Z = \varkappa z$ war zunächst der Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ in einen andern mit Radius $\sqrt{\varkappa}$ verwandelt. Derselbe geht durch die Transformation $Z = \sqrt{1 - \zeta^2}$ in eine Lemniscate $pp_1 = \varkappa$, bezogen auf die Brennpunkte ± 1, über. Folglich:

Bei der Abbildung $Z = \Delta\, am\, z$ entspricht den Parallelen zur x-Axe von der Gleichung $y = \pm \frac{2n+1}{2} K'$ stets eine Lemniscate mit den Brennpunkten ± 1, welche durch die Punkte $\pm\sqrt{1 + \varkappa}$ und $\pm\sqrt{1 - \varkappa}$ geht.

Hier ist $\varkappa < 1$, folglich besteht die Lemniscate aus zwei getrennten Ovalen.

Bereits in § 43, 1 wurde folgender Satz bewiesen:

Bei der Abbildung $Z = \Delta\, am\, z$ entspricht den Parallelen zur y-Axe von der Form $x = \pm \frac{2n+1}{2} K$ ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $R = \sqrt{\varkappa'}$.

*) Auch die experimentelle Darstellung dieses Problems ist Herrn Guébhard nach einer von mir angefertigten Zeichnung vortrefflich gelungen.

Um einen anderen Beweis zu liefern, entwickeln wir die Gleichungen der $\triangle$ am-Curven mit Hilfe des Additionstheorems in gewöhnlichen Coordinaten.

Aus

$$\triangle \operatorname{am}(x \pm yi) = \frac{\triangle \operatorname{am} x \triangle \operatorname{am} yi \mp \varkappa^2 \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x \sin \operatorname{am} yi \cos \operatorname{am} yi}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi}$$

folgt durch Addition und Subtraction

$$34) \quad \begin{cases} X = \dfrac{\triangle \operatorname{am} x \triangle \operatorname{am} yi}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi}, \\ Yi = -\dfrac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} y \sin \operatorname{am} yi \cos \operatorname{am} yi}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi}, \end{cases}$$

und durch Multiplication von $\triangle \operatorname{am}(x + yi)$ und $\triangle \operatorname{am}(x - yi)$ ergiebt sich

$$X^2 + Y^2 = \frac{\triangle^2 \operatorname{am} x - \varkappa^2 \cos^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi} = \frac{\triangle^2 \operatorname{am} yi - \varkappa^2 \cos^2 \operatorname{am} yi \sin^2 \operatorname{am} x}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi}.$$

Führt man wieder die Bezeichnungen des § 101 ein, so folgt aus der letzten Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{n^2 - R^2}{\varkappa^2 (m^2 - R^2 l^2)}, \quad l^2 = \frac{\nu^2 - R^2}{\varkappa^2 (\mu^2 - R^2 \lambda^2)}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 34) ein, so ergeben sich nach einigen Umformungen folgende Relationen:

$$35) \quad R^4 - R^2 \frac{\mu^4 + \varkappa'^2 \lambda^4}{\lambda^2 \mu^2} + R^2 \cos^2 \vartheta \frac{(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}{\lambda^2 \mu^2 \nu^2} + \varkappa'^2 = 0,$$

$$36) \quad R^4 - R^2 \frac{m^4 + \varkappa'^2 l^4}{l^2 m^2} + R^2 \cos^2 \vartheta \frac{(m^2 - l^2 n^2)^2}{l^2 m^2 n^2} + \varkappa'^2 = 0.$$

Der Factor von $R^2 \cos^2 \vartheta$ kann nur in Gleichung 36) verschwinden, und zwar geschieht dies für $l^2 = \frac{1}{1 + \varkappa}$. Nun ist aber

$$\sin \operatorname{am}\left[\pm (2n+1)\frac{K}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa'}},$$

und für diesen Werth geht die Gleichung über in

$$37) \qquad R^2 = \varkappa'.$$

Damit ist der Beweis geliefert. Dass Reciprocität gegen den Kreis stattfinden muss, ist jetzt selbstverständlich, ergiebt sich aber auch durch die Transformation $\mathfrak{R} = \frac{R}{\sqrt{\varkappa}}$, wodurch dieser Kreis in den Einheitskreis verwandelt wird und die Gleichungen reciproke Gestalt annehmen. Figur 62 kann mit geringen Veränderungen dazu dienen, das System der $\triangle$ am-Curven zu veranschaulichen.

Es bleibt uns noch übrig, einige Specialfälle ins Auge zu fassen.

Ist zunächst der Modul $\varkappa = 0$, so gehen $\sin \operatorname{am} s$ und $\cos \operatorname{am} s$ in $\sin s$ und $\cos s$ über. Dieser Fall ist bereits erledigt.

Ist hingegen $\varkappa = 1$, so fällt zunächst $\cos \operatorname{am} s$ mit $\triangle \operatorname{am} s$

zusammen, während $\varkappa'$ verschwindet. Zwei der Brennpunkte fallen also im Nullpunkte zusammen. Für diesen Fall verwandelt sich

$$z = \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\varkappa^2 Z^2)}}.$$

in

$$z = \int_0^Z \frac{dZ}{1-Z^2} = \frac{1}{2} \lg \frac{1+Z}{1-Z},$$

$Z = \sin \operatorname{am} z$ geht also über in

$$Z = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan zi,$$

während $\cos \operatorname{am} z$ und $\triangle \operatorname{am} z$ in $\frac{1}{\cos zi}$ übergehen. Folglich:

Für $\varkappa = 1$ verwandeln sich die sin am-Curven in ein Kreisbüschel durch ± 1 nebst Orthogonalschaar, die cos am-Curven und die $\triangle$ am-Curven in die öfter behandelten Reciproken der confocalen Kegelschnitte um ± 1. Dabei bestätigen sich einige früher gefundenen Sätze.

§ 104. Conforme Abbildung des Rechtecks auf den Einheitskreis.

Diese von Herrn H. A. Schwarz im 70. Bande des Crelle'schen Journals analytisch gelöste Aufgabe kann hier synthetisch mühelos erledigt werden. In Figur 61a und b ist zwar das Rechteck mit den Feldern *EFGHIKLM* auf das Innere eines Kreises übertragen, jedoch eines solchen, der vom Rande aus bis e und bis f eingeschnitten zu denken ist. Dies wird also durch die Abbildung $Z = \sin \operatorname{am} z$ erreicht, und das entsprechende physikalische Problem ist bereits besprochen.

Soll nun der Kreis nicht eingeschnitten sein, so betrachte man das Rechteck *IKLMNOPQ*, welches in Figur 61b auf die nicht eingeschnittene Halbebene übertragen ist. Letztere aber kann man durch Reciprocität leicht in das Innere oder Aeussere eines Kreises verwandeln, je nachdem man den Inversionspunkt ausserhalb oder innerhalb der Halbebene wählt. Wählt man den Punkt $-\frac{i}{\sqrt{\varkappa}}$, so fällt der Punkt ∞ nach dort, und geht der spiegelnde Kreis durch $\pm\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}$, so fällt 0 nach $+i$ und $+i$ nach 0, die reelle Axe aber wird der fragliche Kreis. Damit wäre also die Aufgabe gelöst.

Um die abbildende Function zu finden, bedenke man, dass nach

§ 30 $Z = \frac{z-i}{z+i}$ eine involutorische Abbildung gab, welche den Einheitskreis in die imaginäre Axe verwandelte, folglich verwandelt $Z = i\frac{z-i}{z+i} = \frac{1+iz}{z+i}$ den Einheitskreis in die reelle Axe und umgekehrt. Da nun in Figur 61b der Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ vorlag, so musste man, um die letzte Abbildung brauchbar zu machen, ihn vorher in den Einheitskreis verwandeln, d. h. das Argument mit $\sqrt{\varkappa}$ multipliciren. Die abbildende Function ist also $Z = \frac{1+i\sqrt{\varkappa}z}{i+\sqrt{\varkappa}z}$, oder wenn man wieder zur anfänglichen Aufgabe zurück geht,

38) $$Z = \frac{1+i\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sin\,am}\,z}{i+\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sin\,am}\,z}.$$

Soll also ein Rechteck mit den Endpunkten $\pm K$, $\pm K + K'i$ *so auf den Einheitskreis übertragen werden, dass Peripherie und Mittelpunkt, Mittellinien und Hauptaxen einander entsprechen, so bestimme man den Modul k der elliptischen Function dem Periodenverhältniss* $\frac{K'}{2K}$ *entsprechend und bilde ab mittels der Function* 38.

Die Eckpunkte des Rechtecks gehen über in die unter $\pm 45^0$ und $\pm 135^0$ auf dem Kreise liegenden Punkte, d. h. in die vier Punkte $\pm\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$, $\pm i\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$. Diese werden singuläre Punkte, und zwar solche, in welchen der Winkel 90^0 in 180^0 verwandelt wird, es sind also die transformirten Windungspunkte 1ter Ordnung des § 101.

Nach den Bemerkungen des § 102 über die Kugelfläche hätte man die Angelegenheit der Idee nach folgendermassen erledigen können: Man denke sich, wie dort, Rechteck und Kugelfläche aufeinander abgebildet, suche den Pol zu dem durch die Brennpunkte der sphärischen Kegelschnitte gehenden Aequator und projicire von ihm aus stereographisch auf die diametrale Tangentialebene. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Für das *Quadrat* ist $\frac{K'}{2K} = 1$ zu setzen, d. h. $k = 3 - \sqrt{8}$, wodurch die Windungspunkte regelmässige Vertheilung erhalten. In Figur 64 ist das Entsprechen nicht nur für das Innere, sondern auch für das Aeussere des Kreises durchgeführt.

Die Gleichungen für den allgemeinen Fall des Rechtecks aufzustellen, wird als Uebungsaufgabe dem Leser überlassen. Es sind nur die in Capitel III angegebenen Principien der Inversion auf die Gleichungen der sin am-Curven anzuwenden. Je nach der Form,

die man zu Grunde legt, kann man Gleichungen in Cartesischen, in Polar- oder in Brennpunkts-Coordinaten mit 3, 4 oder 5 Ausgangspunkten der Radii vectores aufstellen.

Jochmann*) findet z. B. auf einfachem Wege folgende Gleichungen:

$$39)\quad \begin{cases} (X^2+Y^2-1)^2 - 4\frac{m^2}{l^2}\xi^2 + 4\frac{k^2m^2}{n^2}\eta^2 = 0 \\ (X^2+Y^2-1)^2 + 4\frac{k'^2}{\nu^2}\xi^2 - 4\frac{1}{\lambda^2}\eta^2 = 0 \end{cases}$$

oder

$$40)\quad \begin{cases} \left(R-\frac{1}{R}\right)^2 = 4m^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{l^2} - \frac{k^2\sin^2\varphi}{n^2}\right), \\ \left(R-\frac{1}{R}\right)^2 = 4\left(\frac{\sin^2\varphi}{\lambda^2} - \frac{k'^2\cos^2\varphi}{\nu^2}\right), \end{cases}$$

$$41)\quad \begin{cases} \frac{R_2+R_1}{R_4+R_3} = \frac{R_1-R_3}{R_2-R_1} = \frac{1-\varkappa l}{n} = \frac{n}{1+\varkappa l}, \\ \frac{R_2+R_1}{R_4-R_3} = \frac{R_4+R_3}{R_2-R_1} = \frac{\mu+\nu}{\varkappa'\lambda} = \frac{\varkappa'\lambda}{\mu-\nu}, \end{cases}$$

wo l, m, n, λ, μ, ν im Wesentlichen die Bedeutung des § 101 haben. Auch die Schlüsse über Reciprocität, Symmetrie u. s. w. sind leicht zu ziehen.

Von wesentlichem Interesse ist folgende Bemerkung Jochmanns: Geht man mittels der Landen'schen Transformation vom Modul $\varkappa$ zu $\varkappa_1 = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$ über, vom Argument z zu $v = (1+\varkappa)z$, so wird (nach Jacobi, Fund. S. 96):

$$\frac{2\sqrt{\varkappa}\sin\operatorname{am}(z,\varkappa)}{1+\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(z,\varkappa)} = \varkappa\sin\operatorname{am}(v,\varkappa_1),$$

$$\frac{1-\varkappa\sin^2\operatorname{am}(z,\varkappa)}{1+\varkappa\sin^2\operatorname{am}(z,\varkappa)} = \triangle\operatorname{am}(v,\varkappa_1),$$

also geht die Abbildung

$$Z = \frac{1+i\sqrt{\varkappa}\sin\operatorname{am} z}{i+\sqrt{\varkappa}\sin\operatorname{am} z} \pmod{\varkappa}$$

über in

$$Z = \varkappa_1\sin\operatorname{am}(v,\varkappa_1) - i\triangle\operatorname{am}(v,\varkappa_1),$$

das Periodenverhältniss $\frac{K'}{2K}$ aber wird zu $\frac{K'_1}{K_1}$, ohne dass jedoch die Gestalt des von uns untersuchten Rechtecks sich ändert.

Setzt man noch

$$v = w + K'i,$$

*) Zeitschr. für Mathem. und Physik 14. Jahrg., 1869, Seite 532 etc.; Zur Abbildung des Rechtecks auf die Kreisfläche.

was nur eine Verschiebung des Nullpunktes bedeutet, so wird die Abbildung 38) schliesslich zu

$$42) \qquad Z = \frac{1 - \cos \operatorname{am} w}{\sin \operatorname{am} w} = \tan\left(\frac{1}{2} \operatorname{am} w\right), \mod \varkappa_1,$$

und den Eckpunkten des betrachteten Rechtecks, welche jetzt dargestellt sind durch $\pm K_1 \pm K'_1 i$, entsprechen die Punkte der Peripherie des Einheitskreises

$$\pm \varkappa_1 \pm \varkappa'_1 i.$$

Durch weitere Entwickelung der Formeln

$$X + Yi = \frac{1 - \cos \operatorname{am}(x + yi)}{\sin \operatorname{am}(x + yi)}$$

$$X - Yi = \frac{1 - \cos \operatorname{am}(x - yi)}{\sin \operatorname{am}(x - yi)}$$

gelangt dann Jochmann auf ähnlichem Wege, wie dem des § 101, zu den Formeln 39). Diese Reproduction war für die Zwecke des nächsten Abschnitts nöthig.

Die Curven dieses Paragraphen lassen sich verallgemeinern, indem man festsetzt, dass der Mittelpunkt des Rechtecks einem *beliebigen* Punkte innerhalb oder ausserhalb des Kreises entsprechen soll. Man hat zu diesem Zwecke nur Inversion von einem geeignet gewählten Punkte aus nöthig.

Die physikalische Deutung der Figur 64 und ihrer Verallgemeinerungen ist die, dass z. B. längs eines beliebigen Stückes einer Kreisperipherie Elektricität in eine unbegrenzte Platte ein-, längs eines anderen Stückes derselben ausströmt. Die Curven sind dann Spannungscurven und Stromlinien. [Experimentelle Wiedergaben verallgemeinerter Zeichnungen, ebenso der noch zur Sprache kommenden Gruppen, sind im Besitze des Verfassers.]

§ 105. Beispiele isogonaler Trajectorien von sinam- und cosam-Curven, verbunden mit einigen Abbildungsaufgaben.

Um die Curven zu finden, welche bei der Abbildung $Z = f(z)$ den Trajectorien der Parallelenschaaren $x = a$ und $y = b$ mit dem Schnittwinkel $\pm 45^0$ entsprechen, untersuche man, was bei der Abbildung

$$Z = f\left[z\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = f\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(z \pm zi)\right]$$

den Parallelenschaaren $x = a$ und $y = b$ entspricht.

a) Die Abbildung 42) des § 104, z. B. würde, um die Trajectorien der Curven 39) zu geben, zu verwandeln sein in

43) $$Z = \frac{1 - \operatorname{cos\,am}(z \pm zi)}{\operatorname{sin\,am}(z \pm zi)} \mod \varkappa_1.$$

Für den Specialfall $\varkappa_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ reducirt sich dies nach leichten Umformungen auf

43*) $$Z = \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) \operatorname{cos\,am}(Z - K) \mod \varkappa_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Folglich: *Die Curven* 39) *des* § 104, *d. h. die der Figur* 64, *sind die isogonalen Trajectorien der um* $\pm 45^0$ *gedrehten cosam-Curven.* Sie sind gleichzeitig gewisse stereographische Projectionen derjenigen sphärischen Kegelschnitte, deren Brennpunkte den Aequator der Kugel in vier gleiche Theile theilen.

Dies ist also ein Fall, wo die Curvenschaaren den *Parallelen zu den Diagonalen des halben Periodenrechtecks entsprechen.*

b) Die Transformationen $Z = \sqrt{1 - z^2}$ und $Z = \sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}$ verwandeln diese Trajectorien in die der sinam- und Δam-Curven mod $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$, deren Gleichungen man also ohne Weiteres hinschreibt, indem man an Stelle der Polarcoordinaten nach Massgabe des Capitel VII lemniscatische Coordinaten, z. B. $p_1 . p_2$ für r^2 und $\vartheta_1 + \vartheta_2$ für 2Θ schreibt. So sind z. B. durch Figur 65 die Trajectorien zu 45^0 für die sinam-Curven mod $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ dargestellt. Da zu den besprochenen Trajectorien der cosam-Curven mod $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ die Geraden $\pm 45^0$ und der Einheitskreis gehörten, so muss Figur 65 *eine gewöhnliche Lemniscate und eine gleichseitige Hyperbel enthalten.* Beide Schaaren sind, wie aus der Zeichnung der sinam-Curven folgt, reciprok gegen den Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, und zwar führt die Inversion die eine Schaar in die andere über.

Die Figur löst einige specielle Abbildungsaufgaben. So ist z. B. durch die Function $Z = \operatorname{sin\,am} z \mod \varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ das schrägliegende Quadrat $\infty C \infty D$ der Figur 56b auf den Raum zwischen den beiden Hyperbeln abgebildet; das Dreieck OFD ist auf einen Quadranten der Lemniscate übertragen. Gewisse schrägliegende Parallelogramme sind auf den geschlossenen Curven der Figur wiedergegeben.

Macht man in unbegrenzter leitender Platte die starkgezeichnete Hälfte der Lemniscate zur negativen, die zu derselben Asymptote gehörigen Hyperbelarme zur positiven Elektrode, so giebt die Figur die Spannungscurven und Stromlinien an. [Dieser vom Ver-

fasser im 20. Bande der Zeitschr. für Mathem. und Physik erledigte Fall ist wohl einer der schönsten unter den von Herrn Dr. Guébhard realisirten. Die Curvenzüge fanden sich durch Nobili'sche Farbenringe in durchaus entsprechender Weise dargestellt.]

c) Etwas mehr Schwierigkeit macht die Ermittelung des Curvensystems, *welches die sinam-Curven* mod $\varkappa = 3 - \sqrt{8}$ *unter* 45^0 *schneidet, welches also den Parallelen zu den Diagonalen des ganzen Periodenrechtecks entspricht.*

Der Verfasser löste diese Aufgabe im 20. Bande der Zeitschr. für Mathem. und Physik folgendermassen: Die zu untersuchende Abbildung ist

$$44) \quad Z = \operatorname{sinam}\left[z\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 \pm i)\right] \quad \text{mod } \varkappa = 3 - \sqrt{8}.$$

Es wird behauptet, dass im Wesentlichen dasselbe geleistet wird durch die Abbildung

$$44^*) \quad Z = \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}} \cdot \frac{1 - i\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right] \cos \operatorname{am} z}{\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right] \cos \operatorname{am} z - i} \quad \text{mod } \varkappa_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Erhält man nämlich Figur 64 aus 62 durch die Abbildung

$$Z = \frac{1 + i\zeta\sqrt{\varkappa}}{i + \zeta\sqrt{\varkappa}}, \quad (\varkappa = 3 - \sqrt{8}),$$

so muss man die isogonalen Trajectorien (45^0) von Figur 64 durch dieselbe Transformation aus denen der Figur 62 erhalten, folglich die von Figur 62 durch die umgekehrte Abbildung

$$z = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{1 - iZ}{Z - i} \quad (\varkappa = 3 - \sqrt{8}).$$

Die Curven der Figur 62 hatten aber zu Trajectorien (45^0) die um 45^0 gedrehten cosam-Curven mod $\varkappa_1 = \sqrt{\tfrac{1}{\nu}}$ (Fig. 63), d. h. man fand die letzteren durch die Abbildung

$$Z = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 \pm i) \cos \operatorname{am} z \quad \left(\text{mod } \varkappa_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

Dies in die vorige Gleichung eingesetzt führt in der That auf 44*).

Figur 66 stellt die gesuchten Curven dar, geometrisch erzeugt durch Inversion der Figur 63 von einer Stelle aus, die den zwischen zwei Brennpunkten liegenden Bogen des dortigen Einheitskreises halbirt. Die Curven können also gleichfalls durch stereographische Projection aus den genannten Trajectorien der Specialschaar sphärischer Kegelschnitte erzeugt werden. Beide Schaaren

sind reciprok gegen den Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ und gehen durch diese Inversion in einander über. Zu ihnen gehören zwei Kreise durch die Punkte $+1$ und $-\frac{1}{\varkappa}$ resp. -1 und $+\frac{1}{\varkappa}$, gegen welche gleichfalls Reciprocität stattfindet.

Das schrägliegende *Quadrat* $ABCD$ in Figur 66b ist auf die innere *Kreissichel* abgebildet, andere Quadrate und Rechtecke auf andere Sicheln oder das Aeussere von solchen. Auch Dreiecksaufgaben sind erledigt.

Die Figur stellt Spannungs- und Stromlinien für den Fall dar, dass die beiden stark gezeichneten Halbkreise entgegengesetzte Elektroden sind. Dabei kann auch einer der zugehörigen Kreise ausgeschnitten werden, ohne dass der Zustand sich ändert.

Die Gleichungen hat Verfasser in der genannten Abhandlung gleichfalls erörtert. Der Gang war folgender: Die cosam-Curven mod $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ lassen sich schreiben

$$(R^2+1)\frac{2-l^4}{1-l^2}+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\sqrt{(R^2+1)^2-4R^2\cos^2\varphi}=4.$$

Um sie um $\pm 45^0$ zu drehen, hat man nur statt φ zu schreiben $\varphi \pm 45^0$, so dass man erhält

$$(R^2+1)\frac{2-l^4}{1-l^2}+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\sqrt{(R^2+1)^2-2R^2(1\mp\sin 2\varphi)}=4.$$

Die Abbildung $Z=\frac{1-iz}{z-i}$ führt man durch, indem man $\frac{p_1}{p}$ an Stelle von R und $\vartheta_1-\vartheta-\frac{\pi}{2}$ an Stelle von φ setzt, wobei jedoch p_1 und p von den Punkten $\pm i$ ausgehen. Dies giebt in Bicircularcoordinaten:

$$\left(\frac{p_1^2}{p^2}+1\right)\frac{2-l^4}{1-l^2}+\frac{l^4-2l^2+2}{1-l^2}\sqrt{\left(\frac{p_1^2}{p^2}+1\right)^2-2\frac{p_1^2}{p^2}[1\mp\sin 2(\vartheta_1-\vartheta)]}=4.$$

wo $l=\sin \operatorname{am} z \bmod \varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

Dies ist die Gleichung der gesuchten Curven unter der Annahme, dass die Schnittpunkte der beiden Kreise die Punkte $\pm i$ sind, von denen die Radii vectores ausgehen.

Man kann nun für p_1 und p Cartesische Coordinaten einsetzen, oder für diese auch Polarcoordinaten einführen. Bringt man dann noch die Transformation $Z=z\sqrt{3-\sqrt{8}}$ an, so hat man die Gleichung in der wirklichen Form.

Aus den mannichfaltigen Eigenschaften der cosam-Curven lassen sich die entsprechenden der hier behandelten leicht ableiten.

Nur die Abbildungen $Z = \sqrt{1 - z^2}$ und $Z = \sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}$ sind nöthig, um die Trajectorien der cos- und $\triangle$ am-Curven mod $\varkappa = 3 - \sqrt{8}$ zu finden, durch welche andere Abbildungsprobleme gelöst werden.

d) Geht man mittels der Landen'schen Transformation vor- und rückwärts zu anderen Periodenverhältnissen über, so erhält man als Diagonalcurven zu 45^0 neue algebraische Curvenschaaren, die wiederum mit stereographischen Projectionen zusammenhängen. Die entsprechenden Trajectorien sphärischer Kegelschnitte sind für diese Specialfälle gleichfalls algebraische Curven, nicht aber die der Krümmungslinien des dreiaxigen Ellipsoids, deren Abbildung jedoch gleichfalls gelöst wird. *Alle* algebraischen Isothermenschaaren kann man schliesslich, wie Herr Schwarz nachgewiesen hat, durch algebraische Functionen aus den drei Fundamentalschaaren erhalten, d. h. aus den Parallelenschaaren, dem Strahlenbüschel nebst Kreisschaar und aus den sinam-Curven (mod $\varkappa$ +, reell und < 1).

§ 106. Litteratur.

1) Siebeck: Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen. Crelle's Journal Bd. 57, 1860. Fortsetzung Bd. 59, 1861.

2) Berner: „Ueber eine geometrische Erzeugung von confocalen Curven 4ten Grades." Zeitschr. für Mathem. u. Phys. 9. Jahrg. 1864. Giebt eine stereometrische Construction der Siebeck'schen Curvenschaaren mittels einer Gruppe von vier Kugeln an.

3) H. A. Schwarz: „Ueber einige Abbildungsaufgaben." Crelle's Journal Bd. 70, 1869. Löst die Aufgabe, Rechteck und Quadrat auf den Einheitskreis abzubilden und einige andere, Polygone aus Geraden und Kreisbogen betreffende Probleme. Die Abhandlung citirt:

4) Christoffel: „Sul problema delle temperature stazionare e la rappresentatione di una data superficie." Annali di Matematica, Tomo I, 1867.

5) H. A. Schwarz: „Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel." Crelle's Journ. Bd. 70, 1869. Hier wird unter anderem bemerkt, dass bei der Abbildung des ungleichaxigen Ellipsoids auf die Oberfläche einer Kugel den beiden Schaaren der Krümmungslinien zwei Curvenschaaren vierter Ordnung entsprechen. Dass die letzteren im speciellen Falle sphärische Kegelschnitte sind, wird dabei (wohl als selbstverständlich) nicht hervorgehoben. Daraus lässt sich aber die stereographische Erzeugung der Siebeck'schen Curven sofort folgern.

6) H. A. Schwarz: „Notizia sulla rappresentatione conforme di un' area ellittica sopra un' area circolare.“ Annali di Matematica pura ed applicata. Ser. II^a, T. III.

7) Hentschel: „Ueber einige conforme Abbildungen.“ Inauguraldissertation. Jena 1871. Ellipse, Kreis etc. werden auf den Einheitskreis übertragen.

8) Jochmann: „Zur Abbildung des Rechtecks auf der Kreisfläche.“ Zeitschr. für Mathem. u. Phys. Bd. 14, 1869.

9) Wangerin: „Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.“ Preisschrift Nr. XVIII der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. 1875. In Abschnitt IV kommen daselbst neue Eigenschaften der Siebeckschen Curven zur Sprache.

10) Schering und Jacobi haben die conforme Abbildung des Ellipsoids auf Rechteck und Ebene gelöst, wie schon in der Einleitung bemerkt war. Nach Obigem spielen dabei die Siebeckschen Curven eine wichtige Rolle.

11) Den stationären Zustand einer rechteckigen leitenden Platte untersucht Jochmann in Bd. 10 der Zeitschr. für Mathem. und Phys. 1865: „Ueber einige Aufgaben, welche die Theorie des logarithmischen Potentials und den Durchgang des elektrischen Stroms durch eine Ebene betreffen.“

12) Heine: „Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten“, Crelles Journ. Bd. 79, 1875, behandelt neben anderen gleichfalls die Rechtecksaufgabe.

13) Die Abhandlungen des Verfassers im 16., 18. und 20. Bande der Zeitschr. für Mathem. und Phys., ebenso die experimentellen Resultate von Guébhard sind bereits mehrfach citirt.

14) Zimmermann: Das logarithmische Potential einer gleichseitig-dreiseitigen Platte. Inaugural-Dissertation. Jena 1881.

15) Lefler: Das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2\,(x-x_3)^2}}$ und seine Umkehrung. Inaugural-Dissertation. Jena 1882.

Schlusswort.

Der Kreis von Functionen, welcher der Behandlung unterworfen werden sollte, ist mit dem letzten Kapitel absolvirt. Der Leser wird hinreichend orientirt sein, um die citirte Litteratur zu studiren und diejenigen Stellen in Angriff zu nehmen, an denen die Theorie des weiteren Ausbaues bedarf. Besonders die hierher gehörigen Abschnitte der Kirchhoff'schen Vorlesungen über mathematische Physik, die Leçons sur les coordonnées curvilignes von Lamé, auch ein Aufsatz von Töpler: „Zur Theorie der stationären elektrischen Strömung", Poggendorff's Annalen Bd. 160, S. 375, seien denen zum Studium empfohlen, die tiefer in den Zusammenhang der Abbildungstheorie mit den Problemen der Hydrodynamik, Isothermenlehre und der Elektrodynamik eindringen wollen. Neben der mathematischen Physik wird aber auch die Functionentheorie der vollständigen Durchführung weiterer geeigneter Beispiele manche Förderung zu verdanken haben, denn selbst das Gebiet der algebraischen Functionen kann noch nicht als vollständig abgeschlossen betrachtet werden.

Nachträge.

1) Nach Drucklegung des Werkes erhielt Verfasser durch die Güte des Herrn Prof. Dr. August dessen Abhandlung: *„Ueber eine conforme Abbildung der Erde nach der epicycloidischen Projection"*, Zeitschr. der Gesellsch. für Erdkunde, Bd. IX, welcher eine Erdkarte und zwei Continentalkarten, von Kiepert gezeichnet, beigelegt sind. Die ganze Erdoberfläche wird dabei auf das Innere einer epicycloidischen Begrenzung abgebildet, die dadurch entsteht, dass ein Kreis einen andern von doppeltem Radius vollständig umrollt. Wichtig ist dabei, dass die Karte an *keiner* Stelle singuläre Punkte besitzt, so dass weder unendliche Vergrösserungen, wie bei der Mercator-Karte und der vollständigen Ptolemäischen Karte, noch Winkeländerungen auftreten. Während also durch die Schifffahrtskarten die Polarregionen gar nicht, durch die stereographischen Halbkugelkarten total getrennt zur Darstellung kommen, hat man hier die Möglichkeit, die Meridiane durch die Pole zu verfolgen. Dabei ist die elementar zu bewerkstelligende Construction verhältnissmässig einfach.

Nimmt man den Massstab der Karte in der Mitte als 1 an, so wächst er auf dem Aequator nach beiden Seiten, um am Rande

die Grösse 4 zu erreichen. Auf der Begrenzung wächst er nach den Polen hin bis zum Maximalwerthe 8. Dies ist wiederum ein verhältnissmässig sehr günstiges Resultat.

Autoritäten wie Kiepert, v. Sydow und Förster haben sich über die August'sche Projection anerkennend ausgesprochen, das Lehrbuch der Experimentalphysik von Jochmann hat sie bereits adoptirt, und so ist es kaum noch nöthig, unser Urtheil dahin abzugeben, dass sie für die Darstellung gewisser physikalischer Erdverhältnisse, ebenso für die Veranschaulichung der Fixsternwelt sehr zweckmässig ist, obwohl die epicyclische Begrenzung auf den ersten Blick etwas künstlich erscheinen mag. Die beiden Continentalkarten brauchen jedenfalls den Vergleich mit den Ptolemäischen Halbkugelkarten nicht zu scheuen. Ein Exemplar einer Fixsternkarte nach epicyklischer Projection befand sich auf der wissenschaftlichen Ausstellung zu London und erregte das Interesse der Astronomen.

Die Theorie der Karte kann der Leser im Anschluss an die Capitel VIII und X oder auch nach Analogie des Beispiels in § 87 mit Leichtigkeit behandeln. Die z-Ebene sei die der stereographischen Projection der gesammten Erdoberfläche. Mit Hilfe der Abbildung $z = \frac{2}{\zeta + \frac{1}{\zeta}}$ resp. ihrer Umkehrung $z = \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}$ [oder, wenn man die Inversion zu Hilfe nimmt, mit Hilfe von $\zeta = z' + \sqrt{z'^2 - 1}$ (Capitel VIII)] gehe man zur ζ-Ebene über, welche schliesslich der Abbildung

$$Z = \frac{3}{2}\zeta - \frac{1}{2}\zeta^3 = \frac{\zeta}{2}(\sqrt{3} + \zeta)(\sqrt{3} - \zeta)$$

(Capitel X) zu unterwerfen ist, wodurch man die August'sche Karte erhält.

Auf die Idee der Karte scheint ihr Urheber dadurch gekommen zu sein, dass die hierher gehörige Epicycloide durch die Gleichungen

$$x = \frac{3}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos 3\vartheta$$

$$y = \frac{3}{2}\sin\vartheta - \frac{1}{2}\sin 3\vartheta$$

dargestellt wird, von wo aus man leicht zu

$$x + yi = \frac{3}{2}e^{i\vartheta} - \frac{1}{2}e^{3i\vartheta}$$

übergehen kann. (Man vergleiche hierzu S. 230.)

Bei dieser Gelegenheit werde noch auf folgende kartographischen Arbeiten hingewiesen:

H. Weber: Ueber ein Princip der Abbildung der Theile einer krummen Oberfläche auf einer Ebene. Crelle's Journ. Bd. 67, S. 229—247.

F. Eisenlohr: Ueber Flächenabbildung. Crelle's Journal Bd. 72, S. 143—151.

Gretschel: Lehrbuch der Kartenprojection. Weimar 1873, bei Voigt.

---

2) Herr Prof. E. Mach übersendet mir eine interessante Abhandlung: *Ueber Herrn Guébhards Darstellung der Aequipotentialcurven*, in welcher mit Hilfe einer Potentialbetrachtung gezeigt wird, „dass bei den entsprechenden Versuchen eine Strömung im Raume stattfindet, bei welcher aber durch Curven gleicher Stromintensität die einer ebenen Strömung entsprechenden Curven gleicher Potentialfunction *angenähert* abgebildet werden können".

Dass bei Experimenten nur von einer Annäherung die Rede sein kann, ist an sich selbstverständlich. Jedenfalls gelingt Herrn Guébhard die Annäherung in sehr hohem Masse. Ein endgültiges Urtheil über dessen elektrochemische Methode wird jedoch erst dann gefällt werden können, wenn wir über den Vorgang der Elektrolyse und ebenso über die Entstehungsweise der Nobili'schen Ringe eine mathematische Formulirung besitzen, die unseres Erachtens noch nicht geliefert ist. Jedenfalls werden die Arbeiten des Herrn Guébhard zu theoretischen Untersuchungen über dieses Gebiet Veranlassung geben. Er selbst hat seine Ansichten soeben in einem Aufsatze: Sur la théorie des figures équipotentielles obtenues par la méthode électrochimique; Compt. Rend. 3. Juli 1882, entwickelt.

---

3) Zu Capitel III § 27 ist noch Folgendes zu bemerken: Die Methode der reciproken Radii vectores (Principe des images) verdankt man W. Thomson, der sie zuerst in Liouville's Journal Bd. 10, S. 364 veröffentlichte. Nach Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte (4. Aufl. 1878) S. 698, ist noch zu vergleichen: Liouville, Bd. 12, S. 365, Jacobi in Crelle's Journal Bd. 15, S. 309, Townsend, Circular-Inversion, Chaptres on the modern Geometry Bd. 2, S. 363, Hart, Quarterly Journ. Bd. 5, S. 260 (Anwendung auf den Feuerbach'schen Kreis), Casey, Quarterly Journ. Bd. 5, S. 318, elementare Behandlung.

---

4) Zu Capitel V § 47 ist noch nachzutragen: Roch, Ueber Functionen complexer Grössen. Zeitschr. für Mathem. und Phys. Bd. 8, S. 12 und S. 183, Bd. 10, S. 169.

Fig. 2.

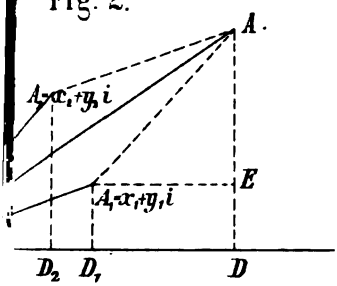


Fig. 3.

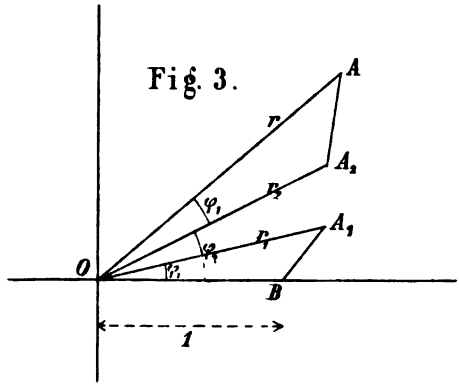
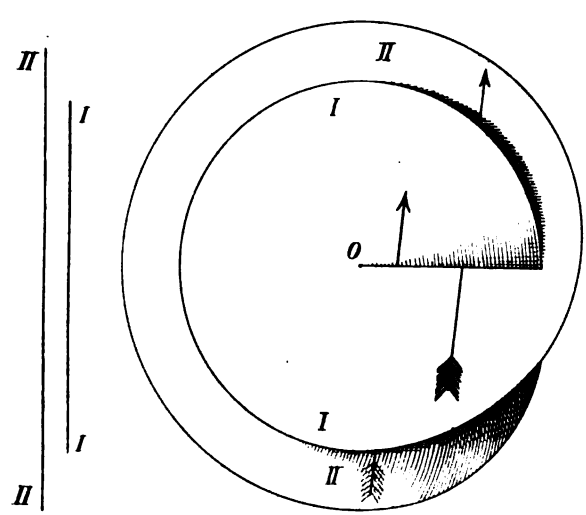


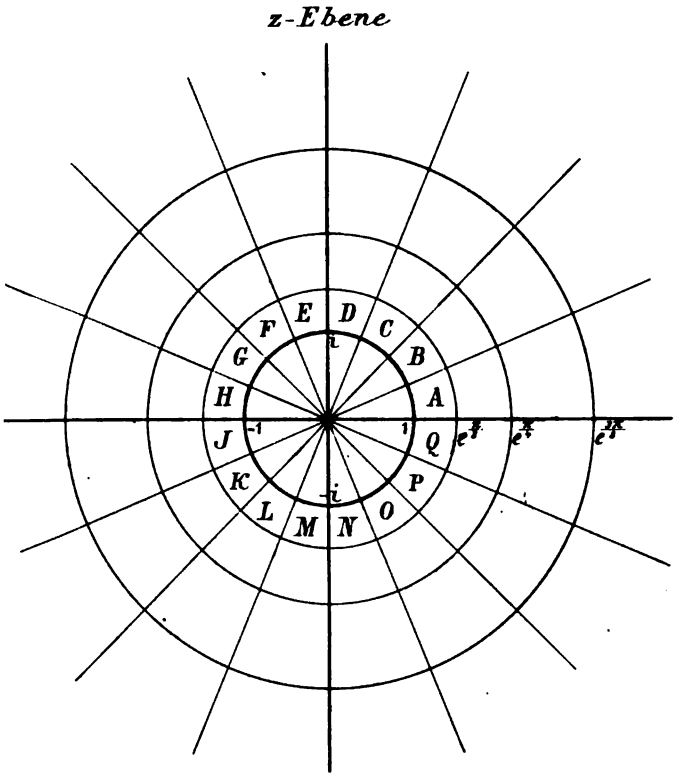
Fig. 7.



Schnitt links von O.

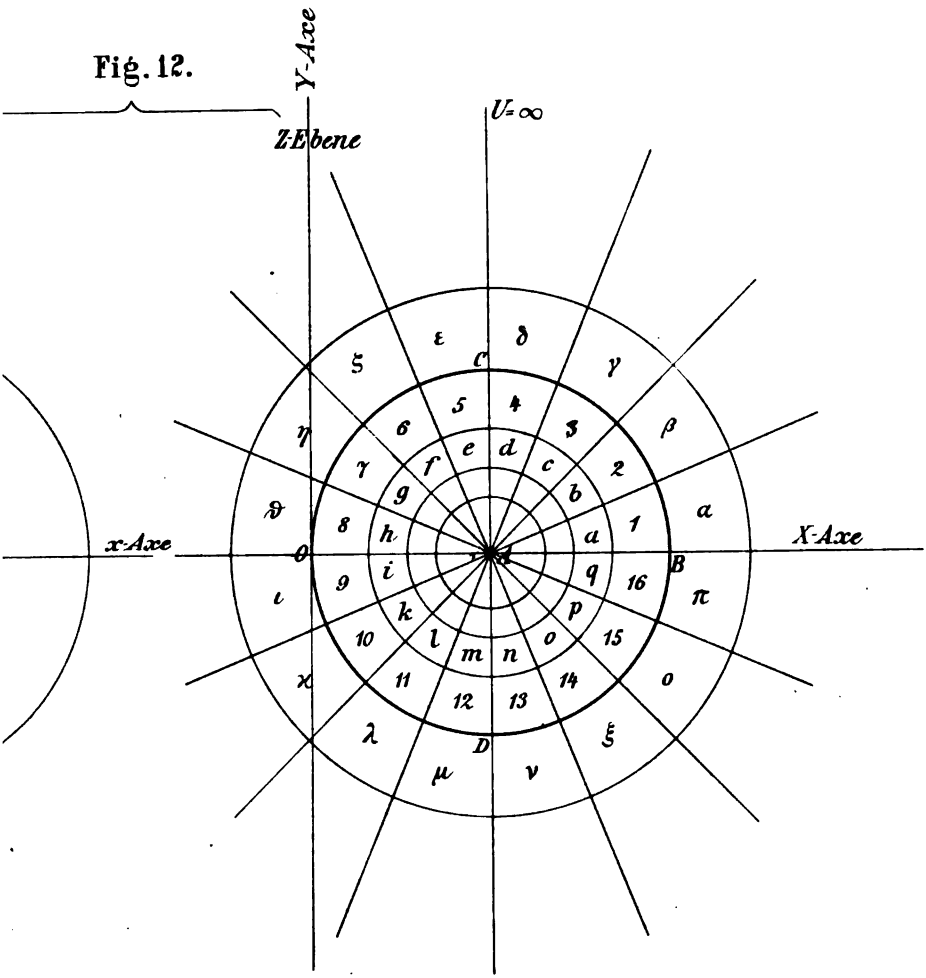
Schnitt rechts von

Lith. v. Erchebach. & Schaefer, Leipzig


z-Ebene
A
B
C
D
E
F
G
H
J
K
L
M
N
O
P
Q
1
-1
i
-i
$e^{\frac{\pi}{4}}$
$e^{\frac{\pi}{2}}$
$e^{\frac{3\pi}{4}}$

$= lg\, z.$

Fig. 12.



ildung $Z = \frac{1}{x}$.

Lith v Eschebach & Schoefer, Leipzig

ig. 10.

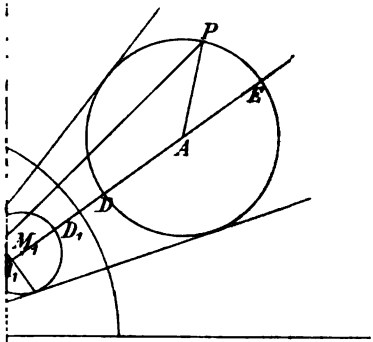
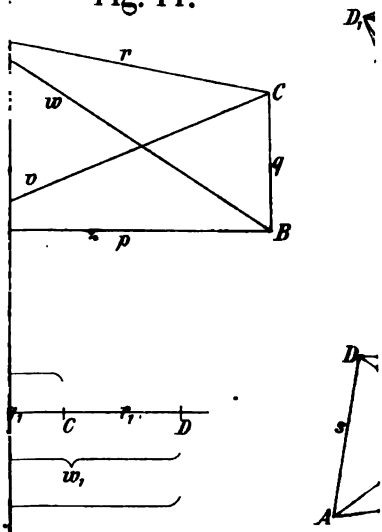


Fig. 14.



. 23.

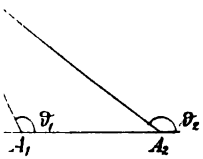


Fig. 27α.

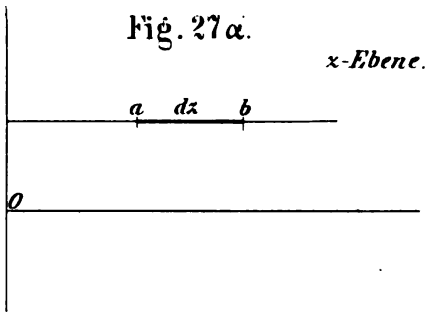


Fig. 27β.

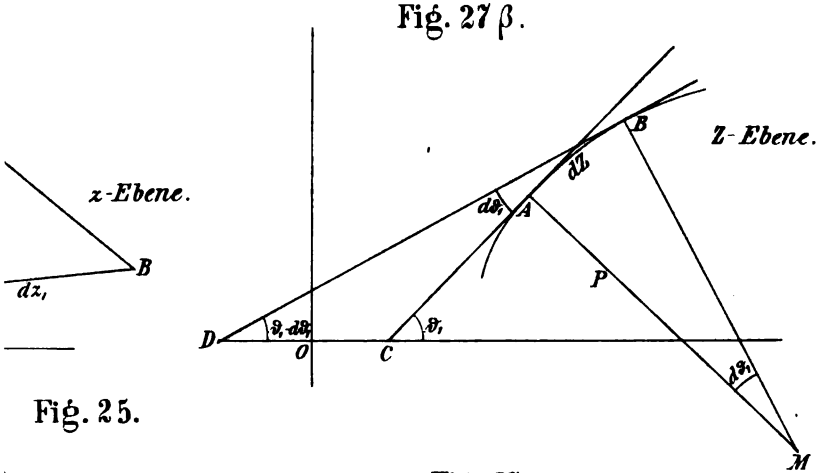
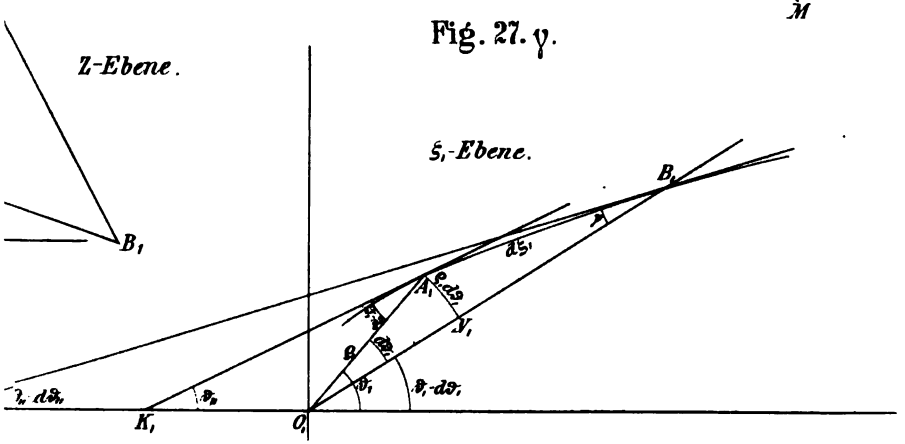


Fig. 25.

Fig. 27. γ.



Lith. v. Eschenbach & Schaefer, Leipzig

Fig. 29.

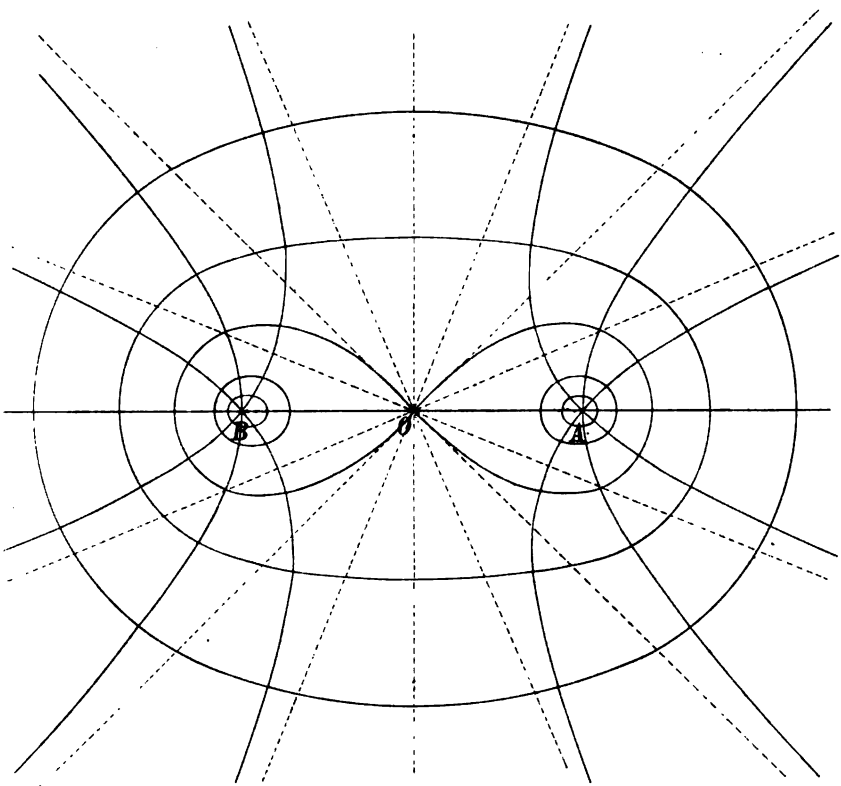
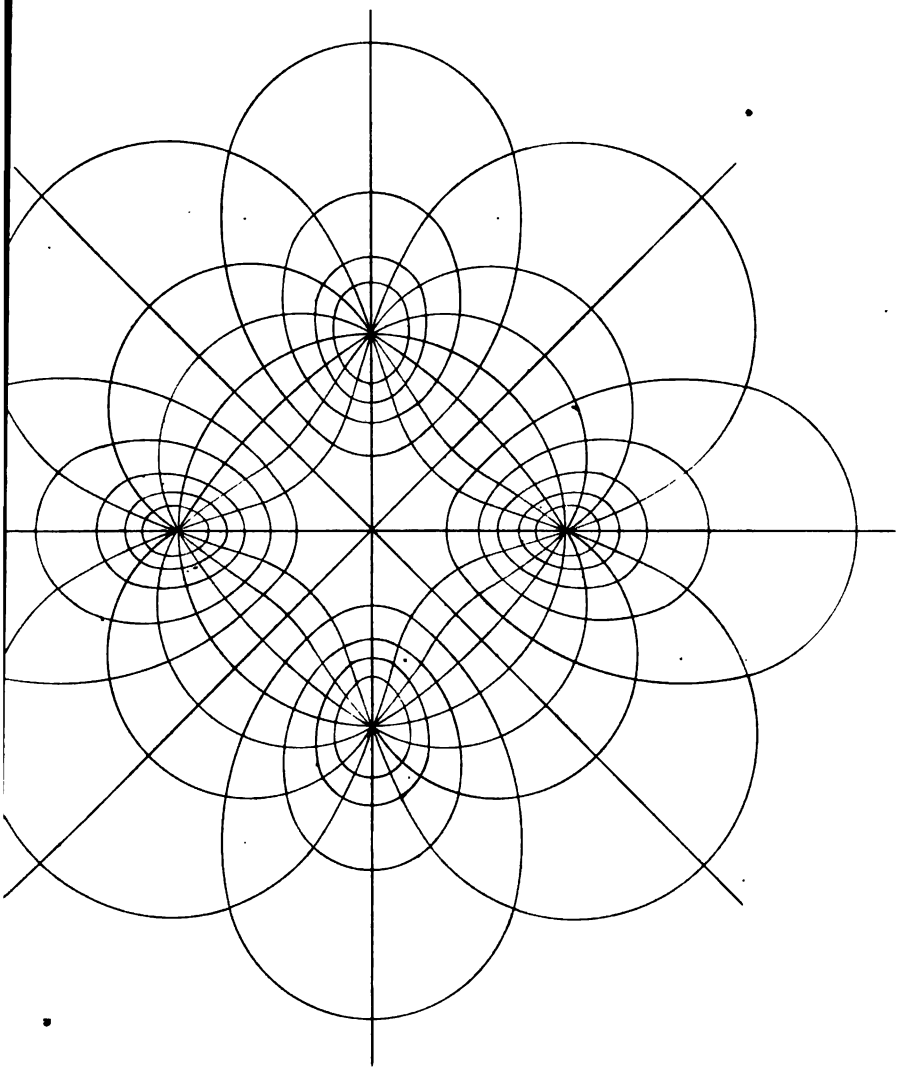


Fig. 31.



34.

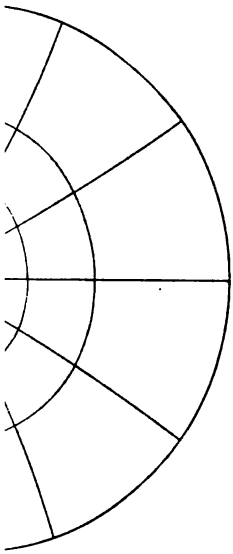
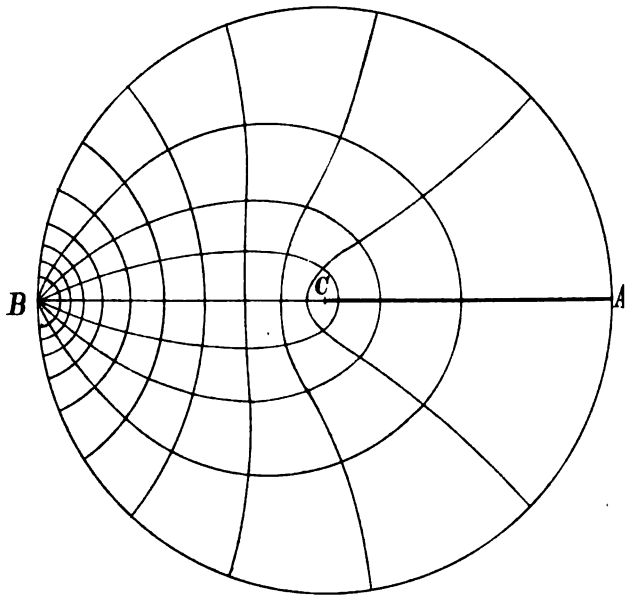


Fig. 35.



g. 36a z-Ebene

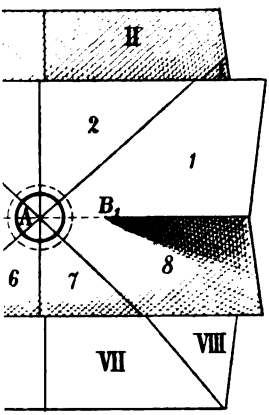
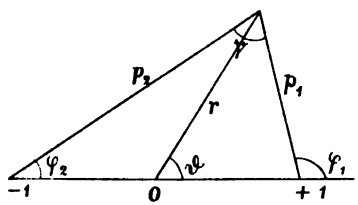
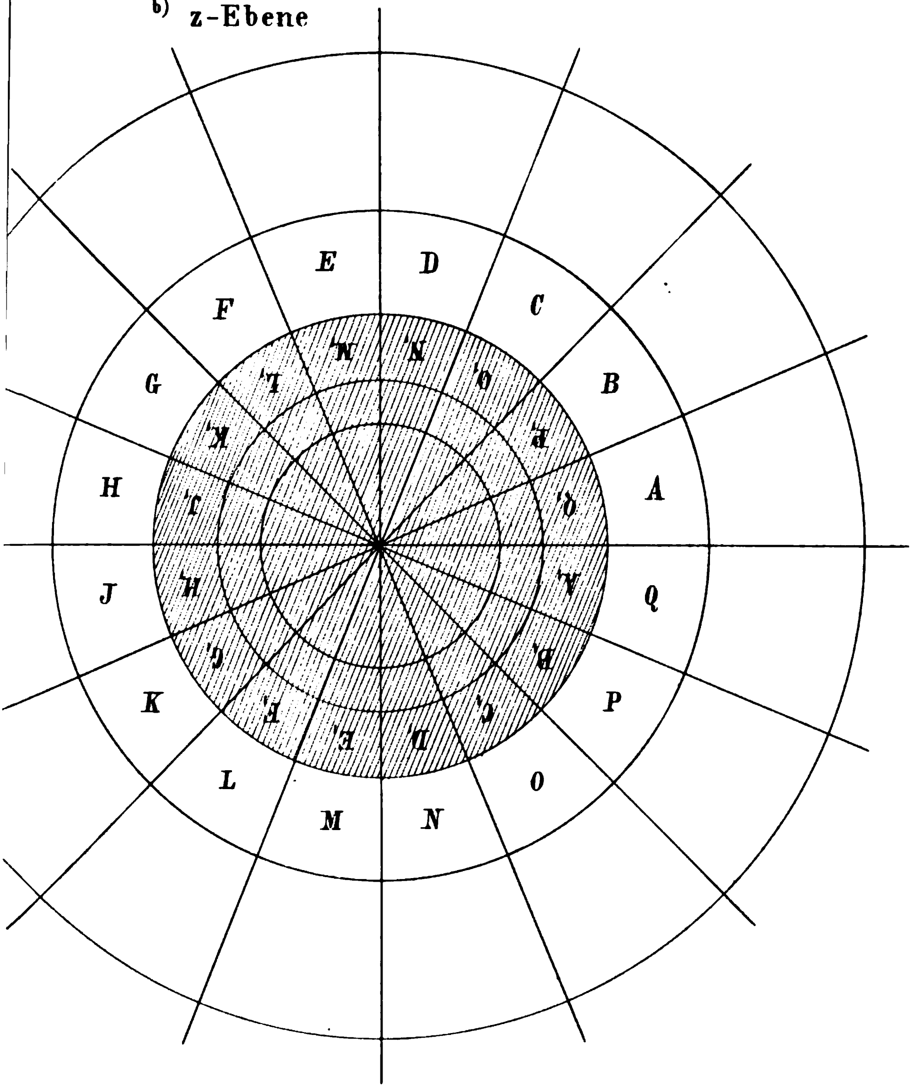
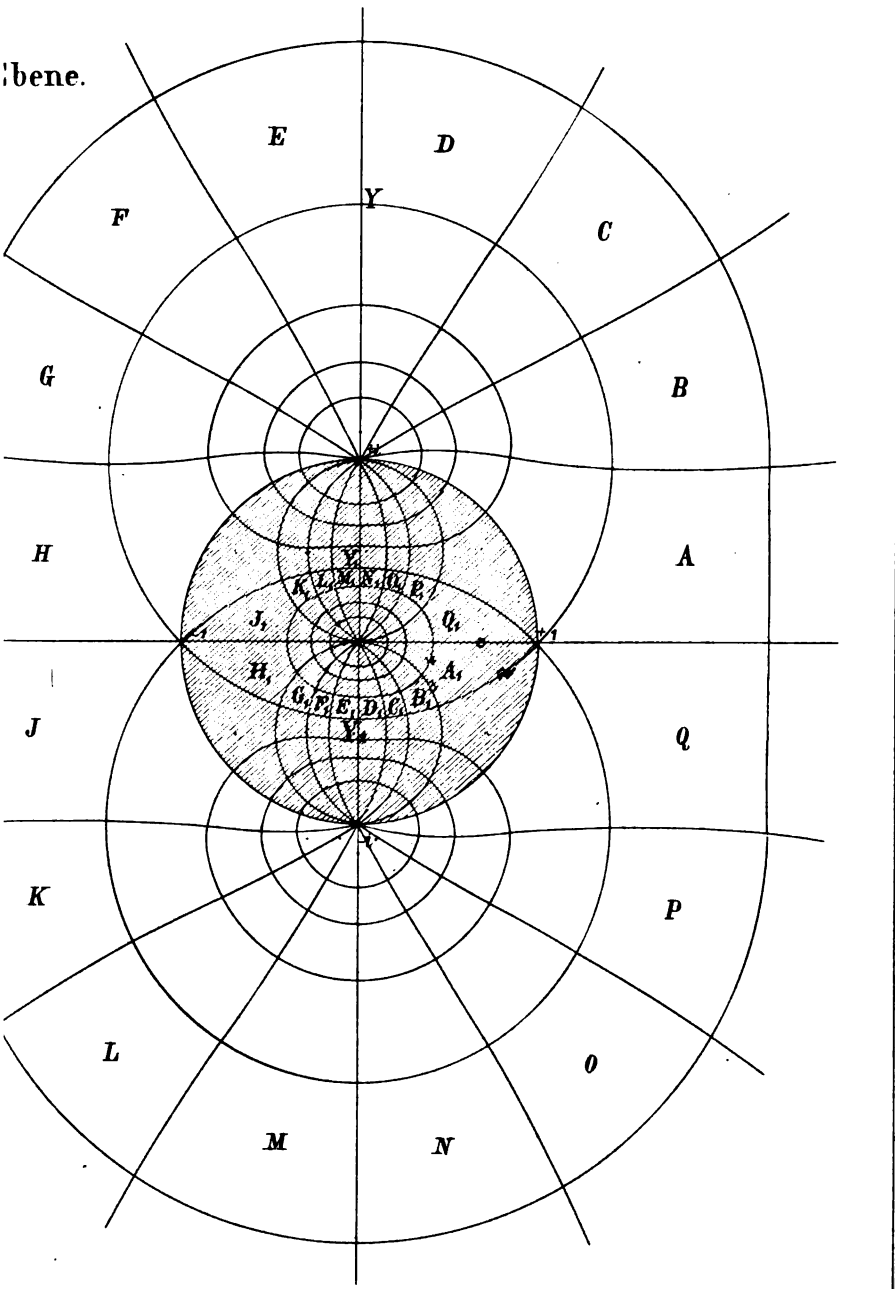


Fig. 37.



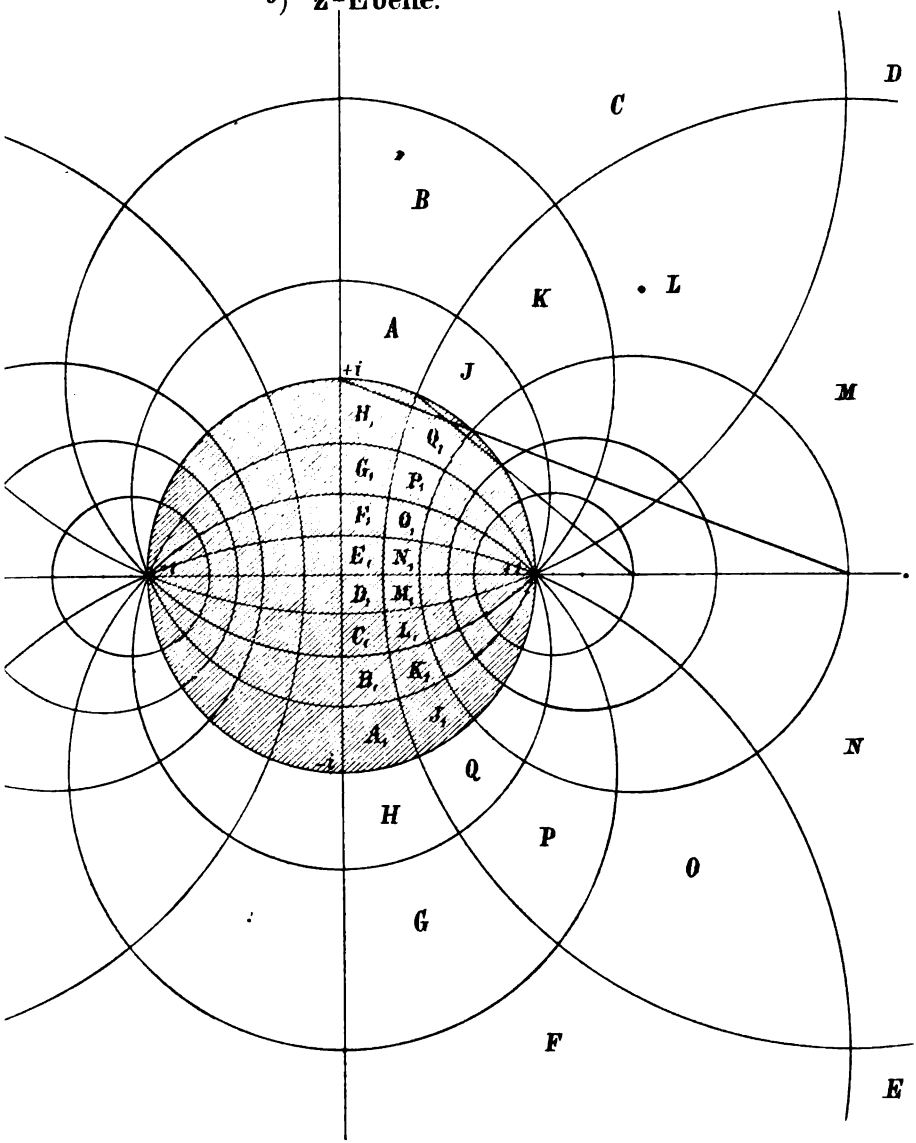
b) z-Ebene





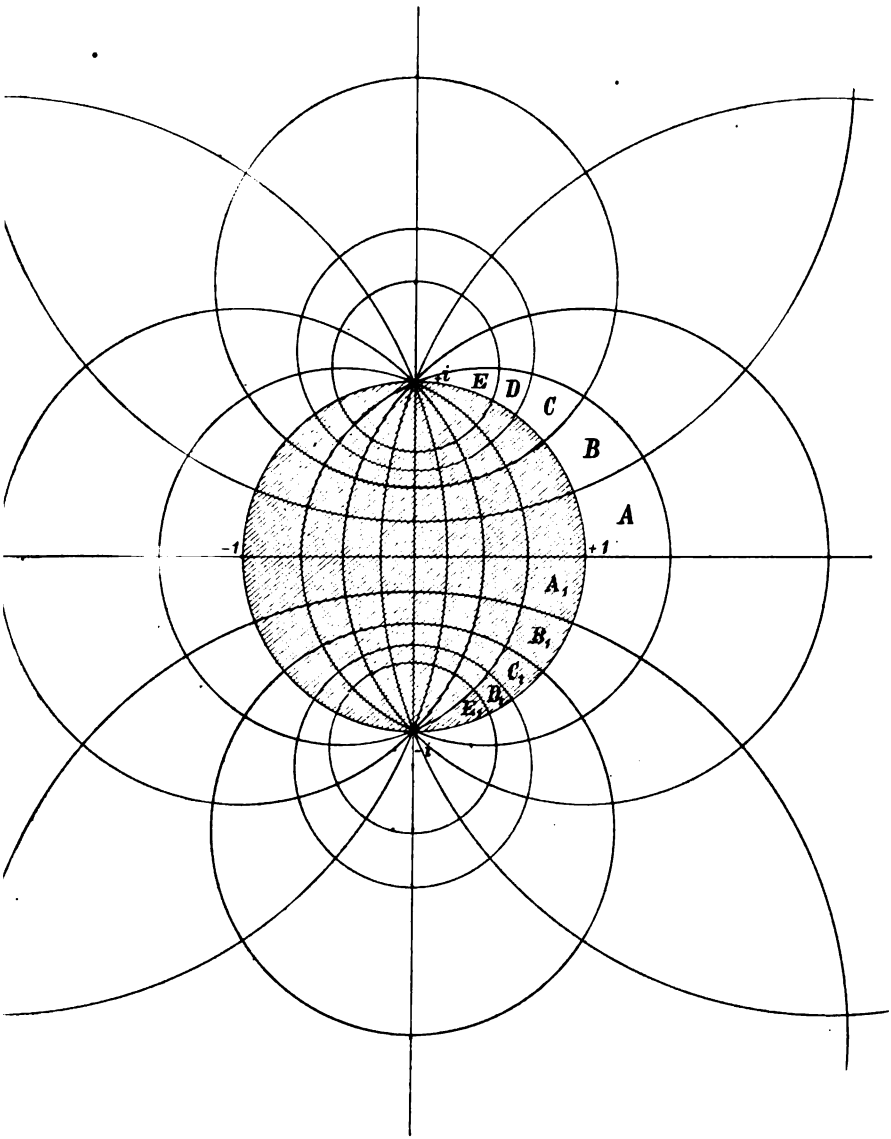
Lith. v Eschebach & Schaefer, Leipzig.

b) z-Ebene.



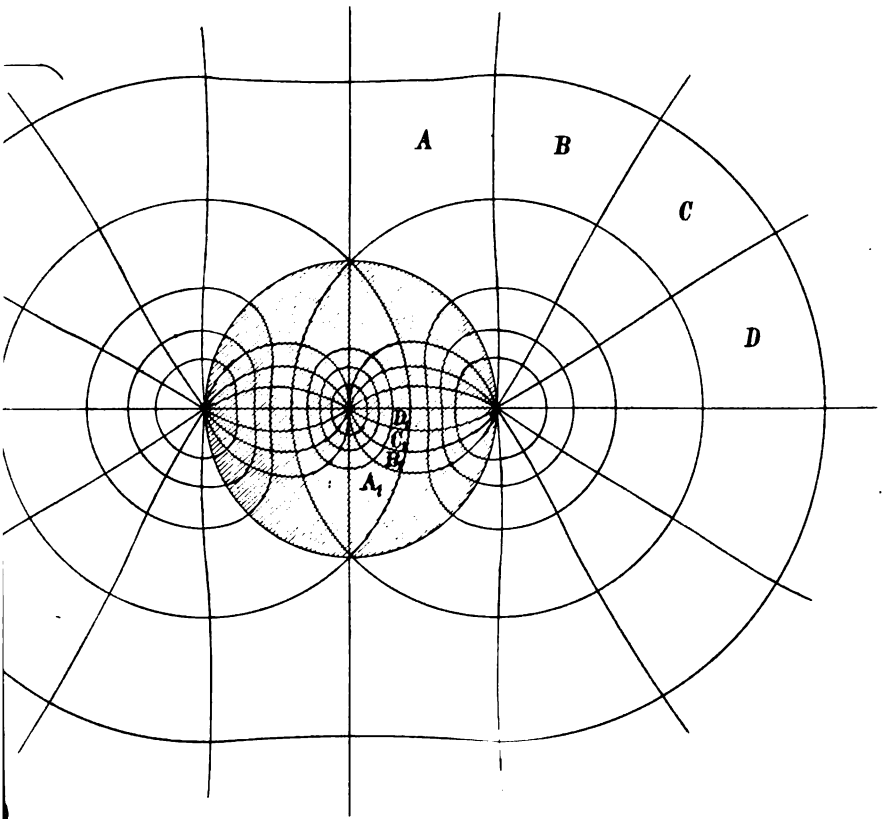
Lith. v. Eschenach & Schaefer, Leipzig

b) z-Ebene



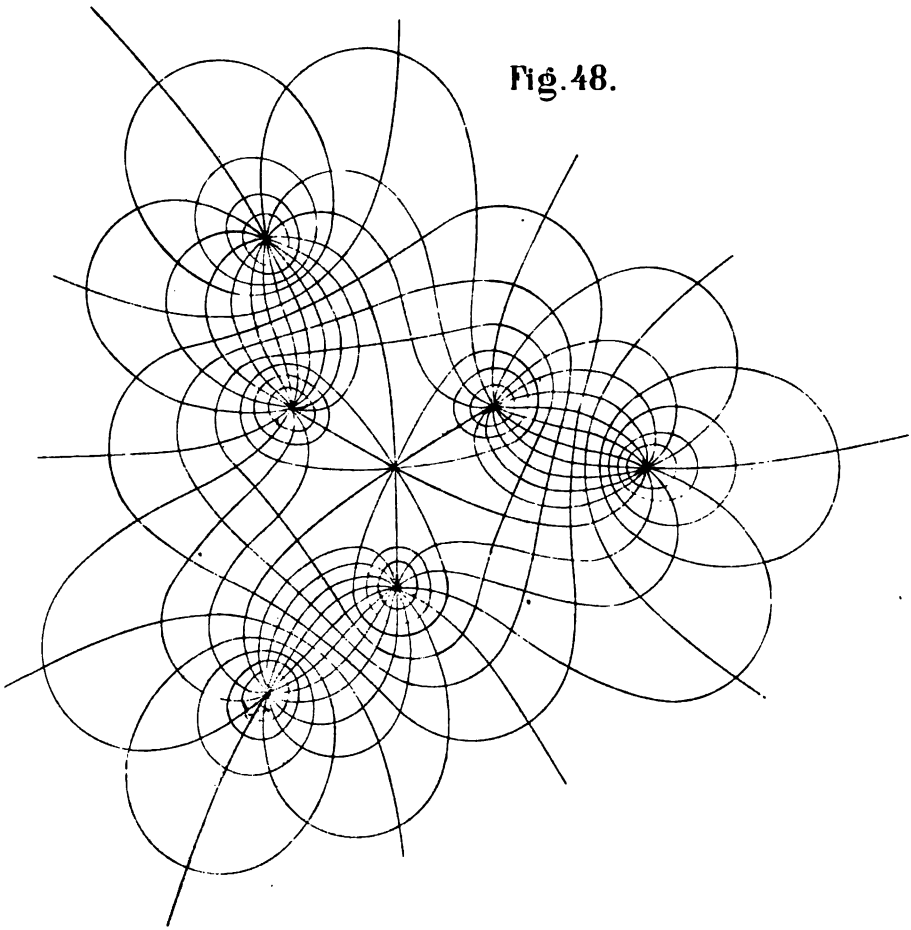
Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig

b) z-Ebene.



Eschebach & Schaefer Leipzig

Fig. 48.



Druck v. F. Bach & Schaefer, Leipzig

9.

z-Ebene

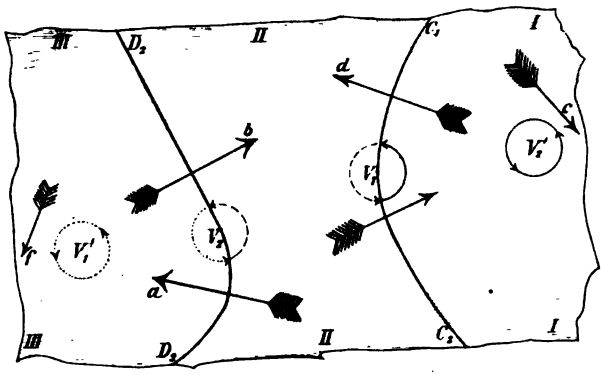


Fig. 51 β. ξ-Ebene.

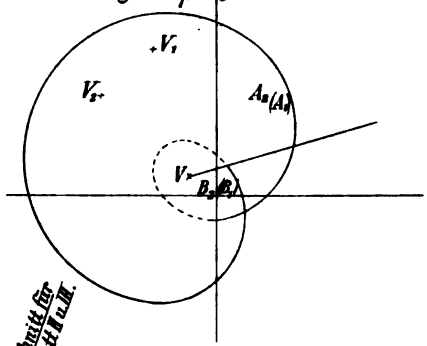


Fig. 51 α. z-Ebene

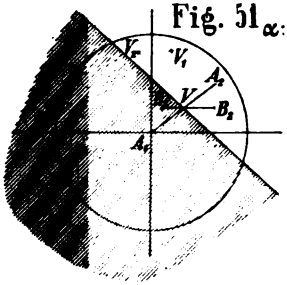
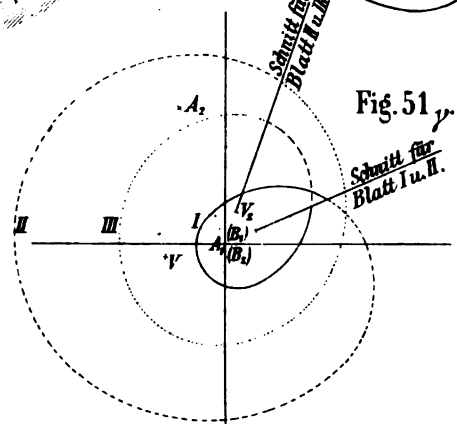


Fig. 51 γ. Z-Ebene.



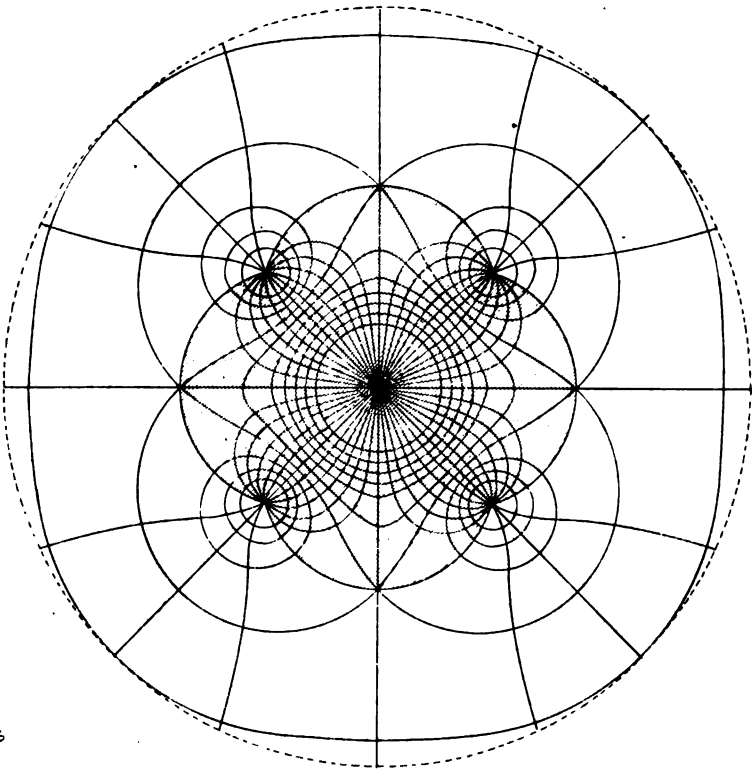
Verlauf im { 1ten Blatt ——— / 2ten Blatt - - - - - - - - - - / 3ten Blatt ..... }

Lith v F. Schell in s. Schnitt ... gr.

Fig. 54.

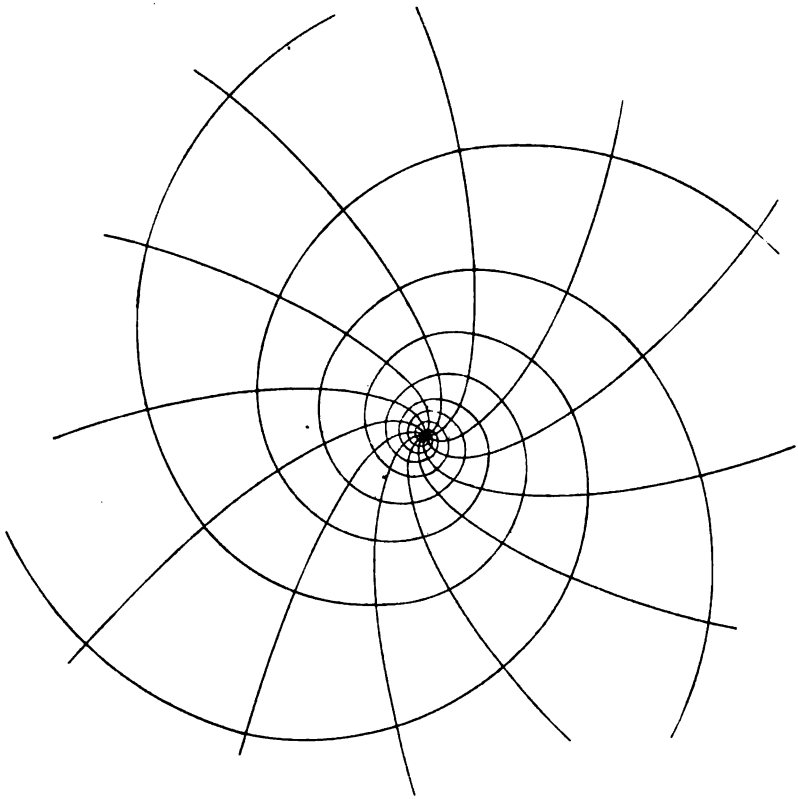
Abbildung $Z = \frac{3z^4+1}{4z^3}$

z - Ebene.



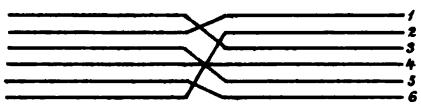
Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Fig. 58.



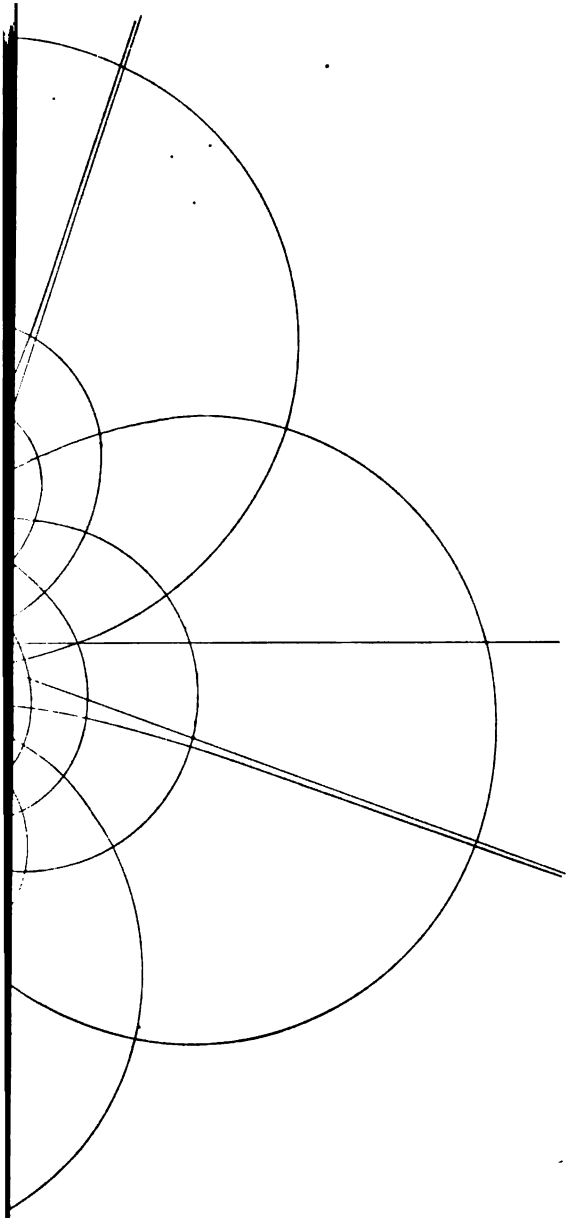
Doppelschaar der logarithmischen Spiralen.

Fig. 57.



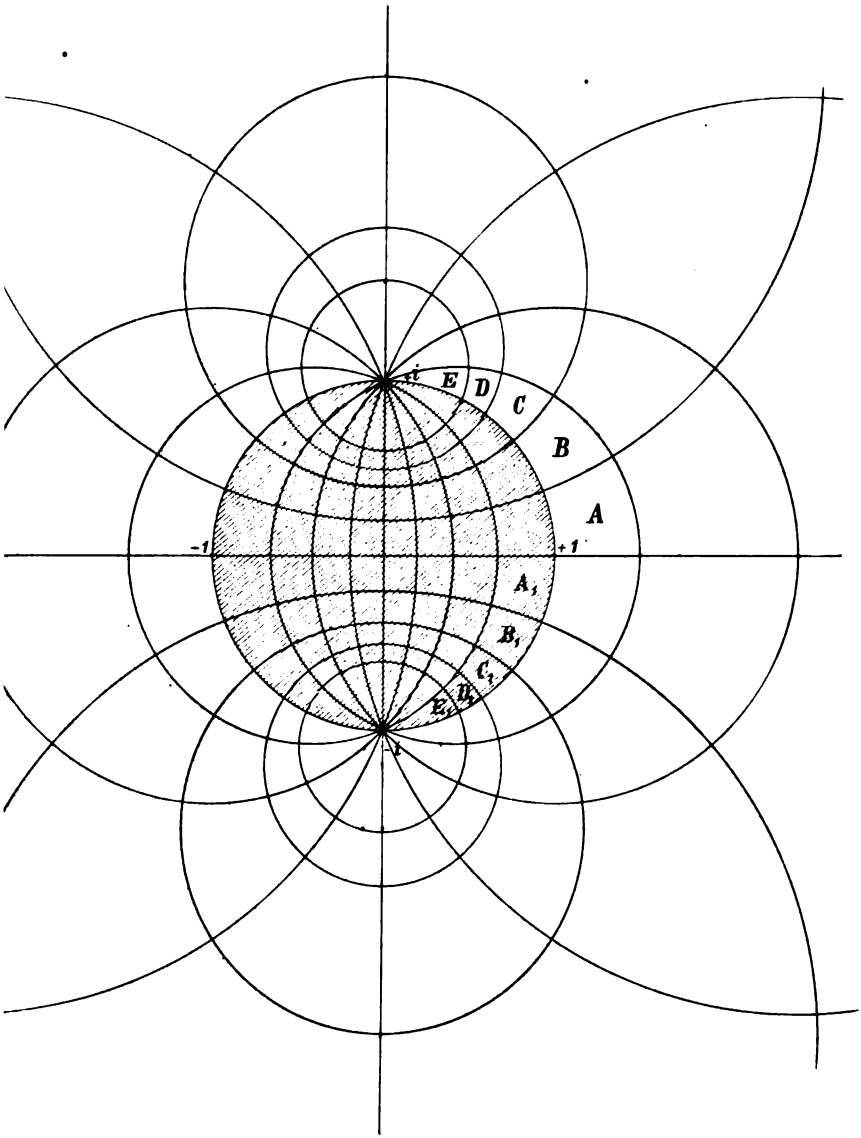
Lith. v. Fischbach & Schaefer, Leipzig.

Taf.XIX.Fig.59



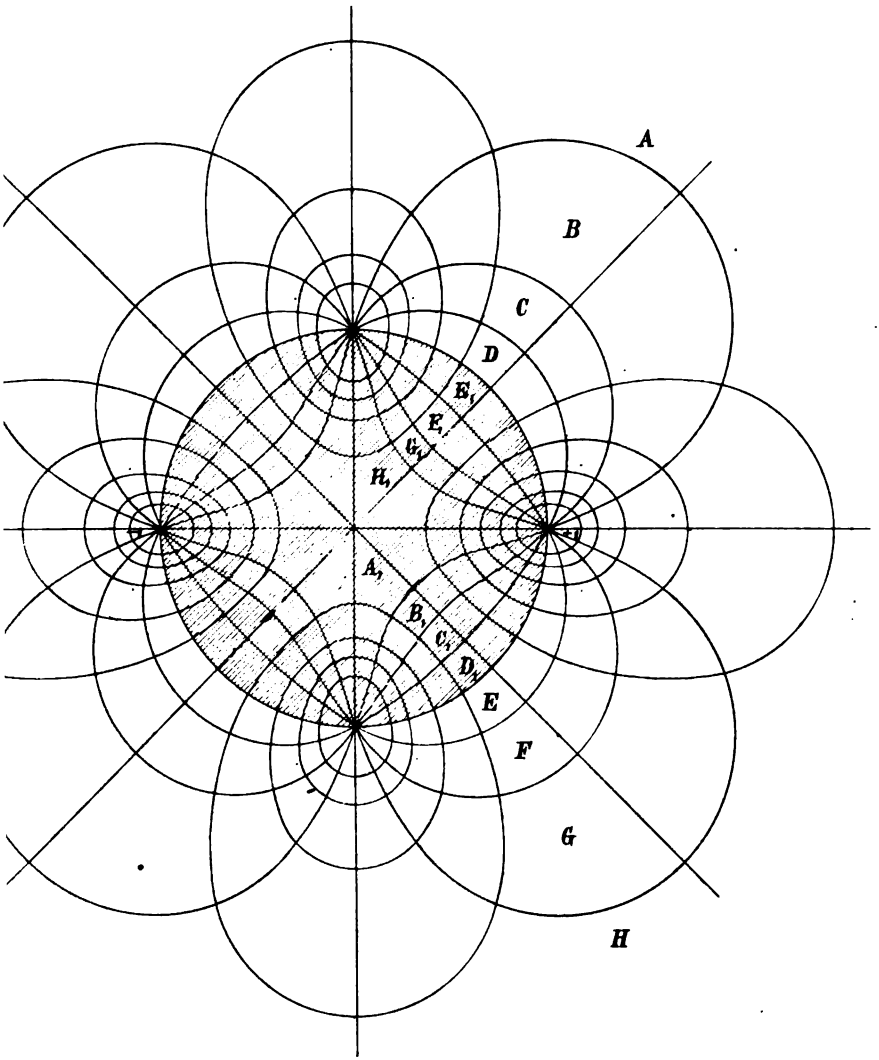
…rien des Kreisbüschels.

b) z-Ebene



Lith. v. Eckenbach & Schaefer, Leipz.

b) z-Ebene



Lith. v. Eschebach & Schaefer Leipzig

9.

z-Ebene

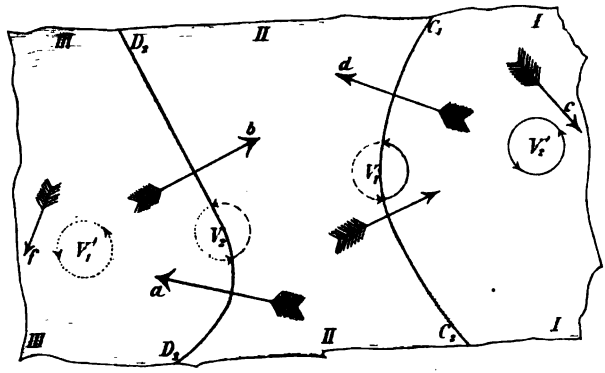


Fig. 51 β. ξ-Ebene.

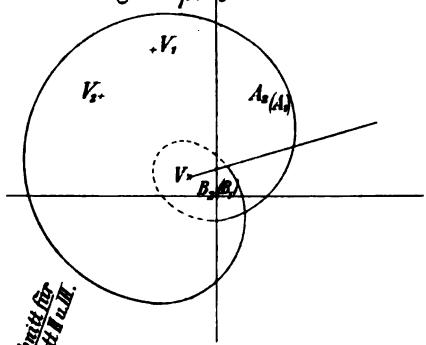


Fig. 51 α: z-Ebene

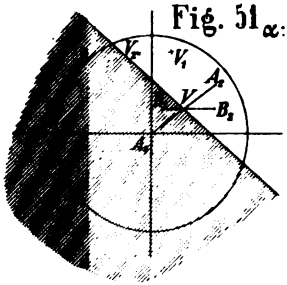
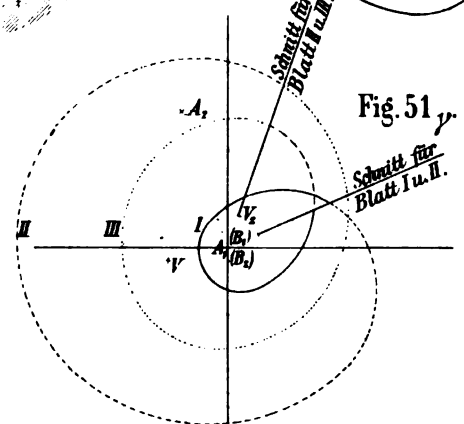


Fig. 51 γ. Z-Ebene.



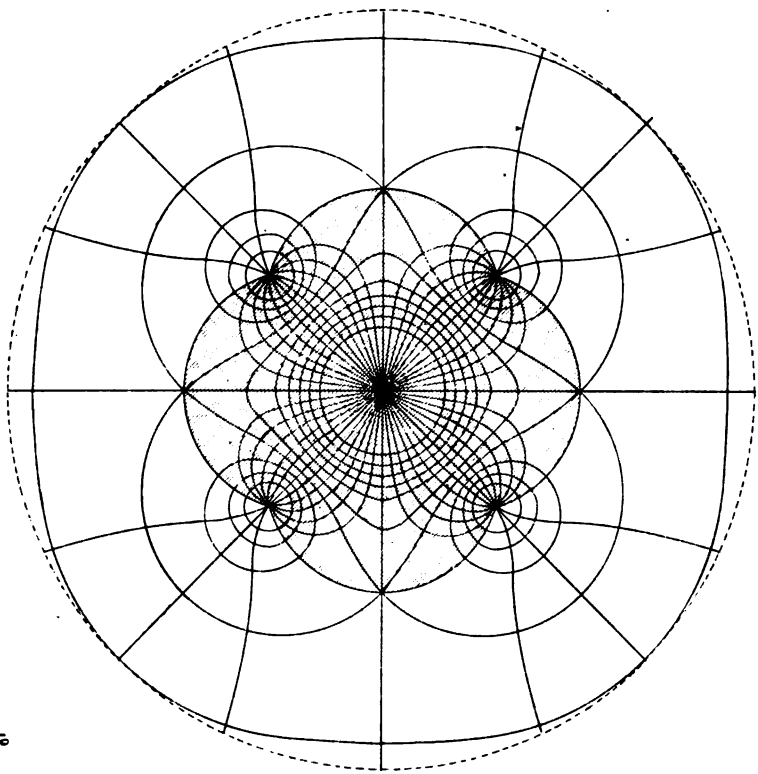
Verlauf im { 1ten Blatt ———— ; 2ten Blatt - - - - - - - - - - ; 3ten Blatt ..... }

Lith v E. [illegible]

Fig. 54.

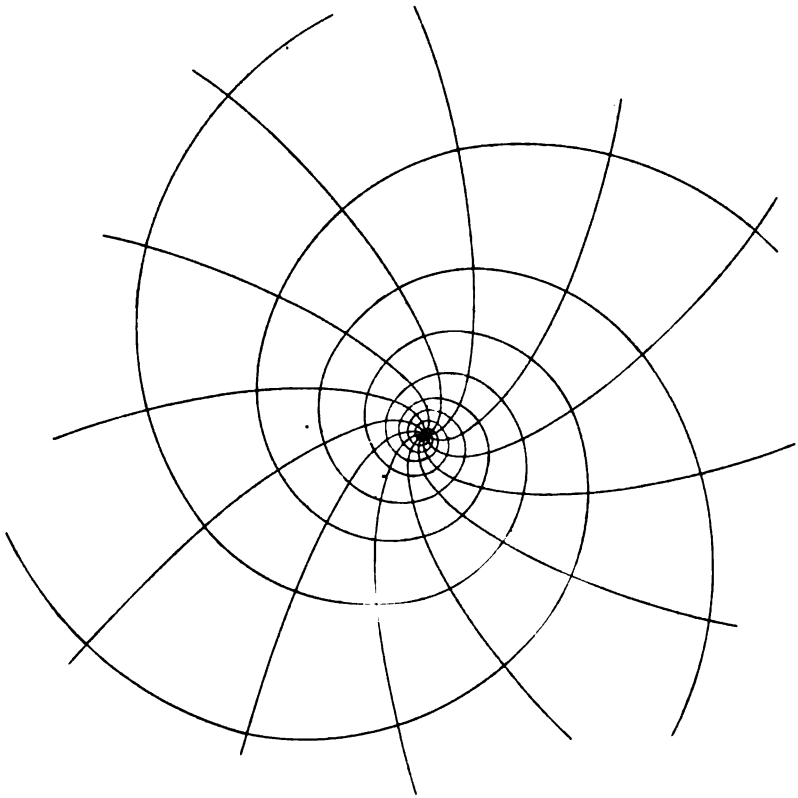
Abbildung $Z = \frac{3z^4+1}{4z^3}$

z - Ebene.



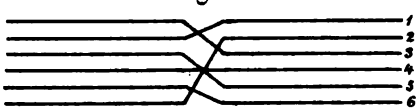
Lith v. Escheback & Schaefer, Leipzig

Fig. 58.

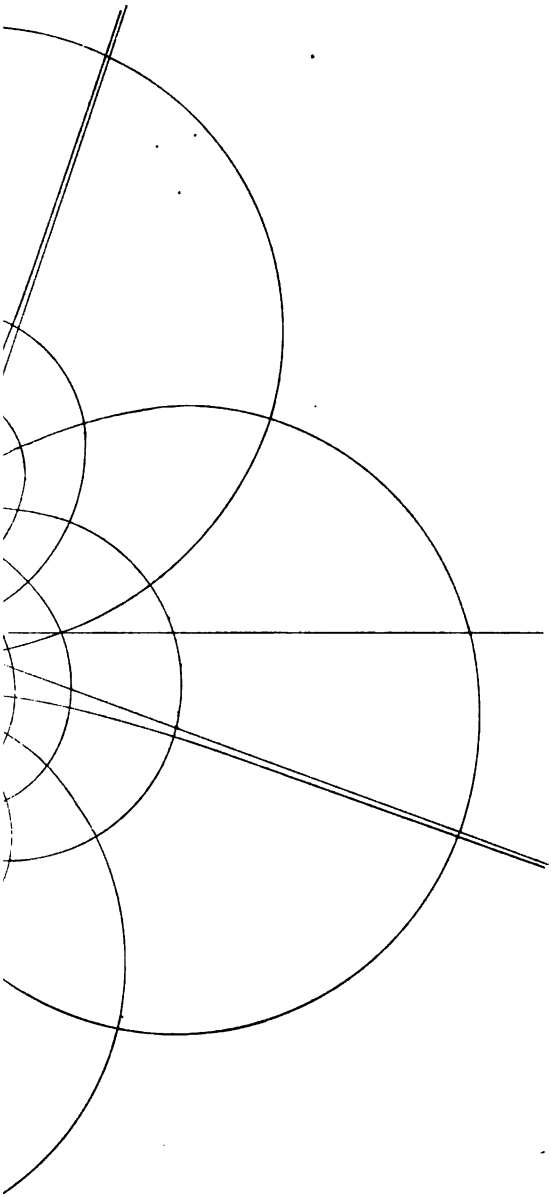


Doppelschaar der logarithmischen Spiralen.

Fig. 57.



Lith. v. Fröhlebach & Schaefer, Leipzig



rien des Kreisbüschels.

Fig. 60 c.

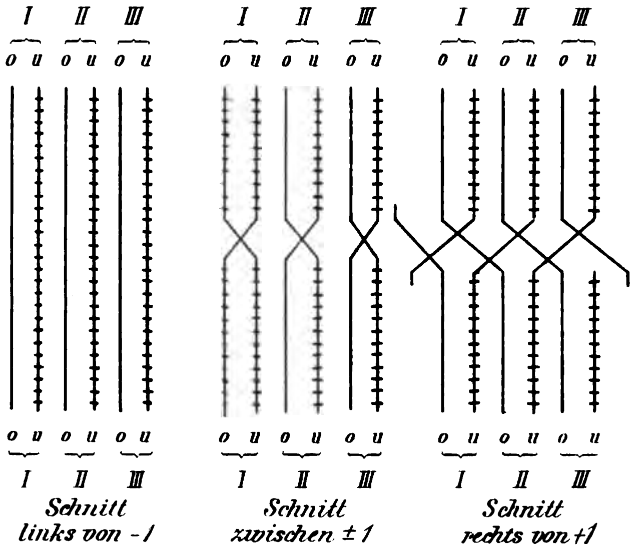


Fig. 60 d.

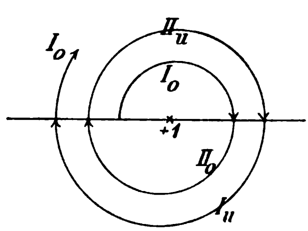


Fig. 61 c

Z-Ebene

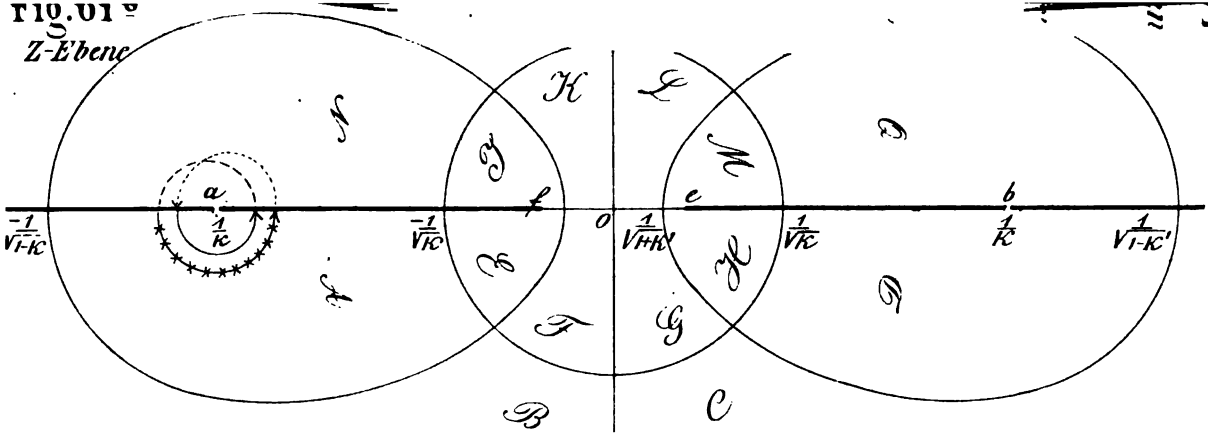
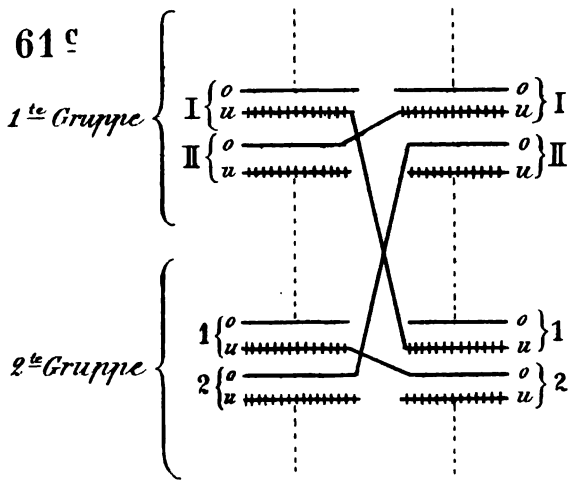


Fig 61 c



Taf. XXI. Fig. 61 a-c.

Lith. v Eschebach & Schaefer, Leipzig.

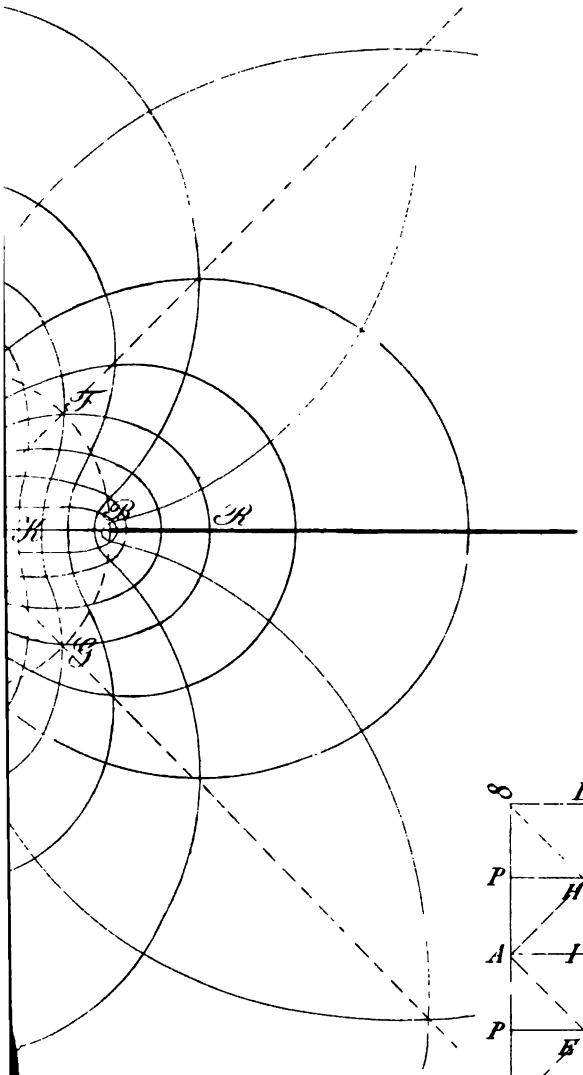
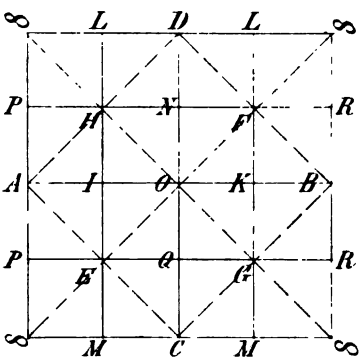


Fig. 63 b.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig

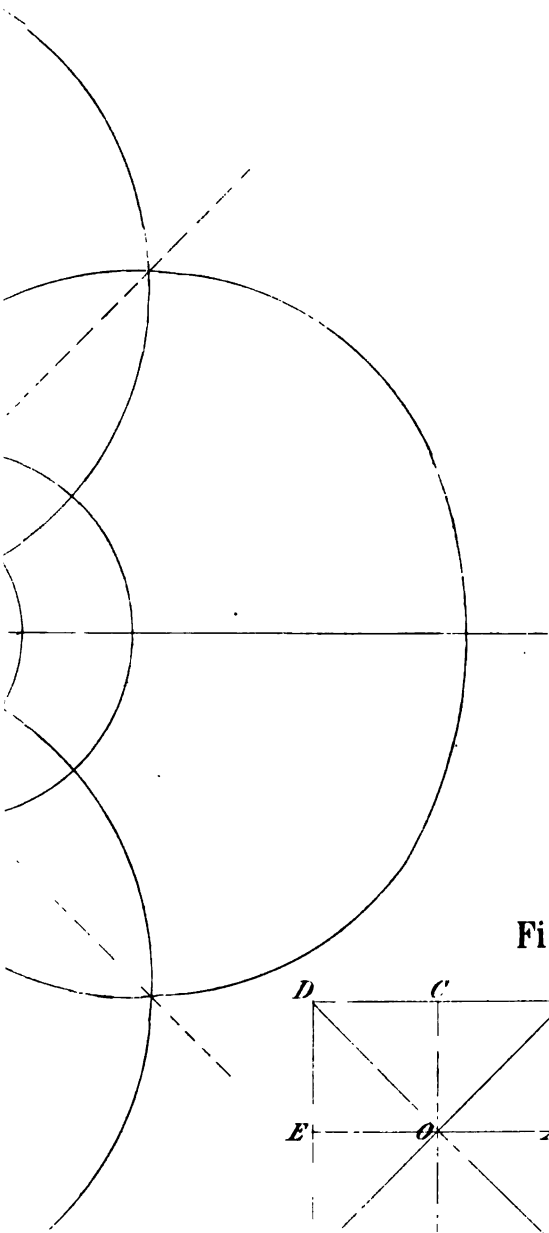
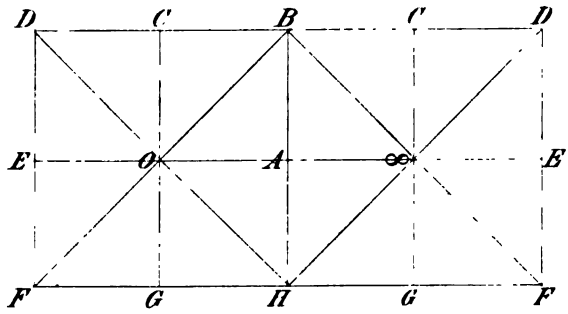


Fig. 64 b.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

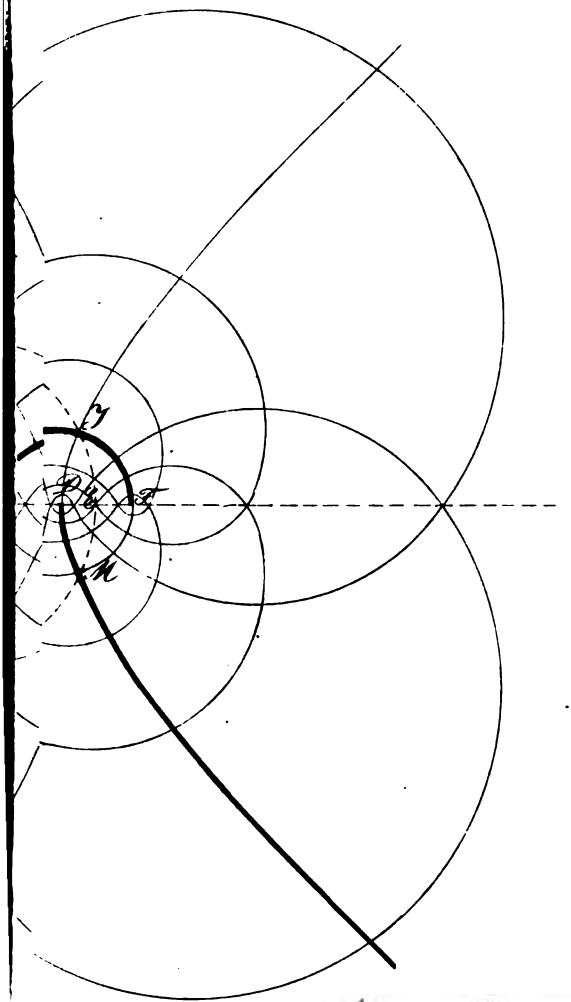
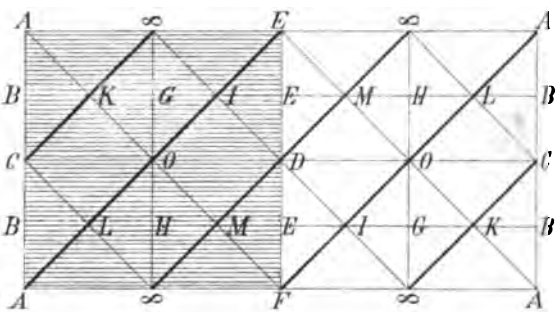
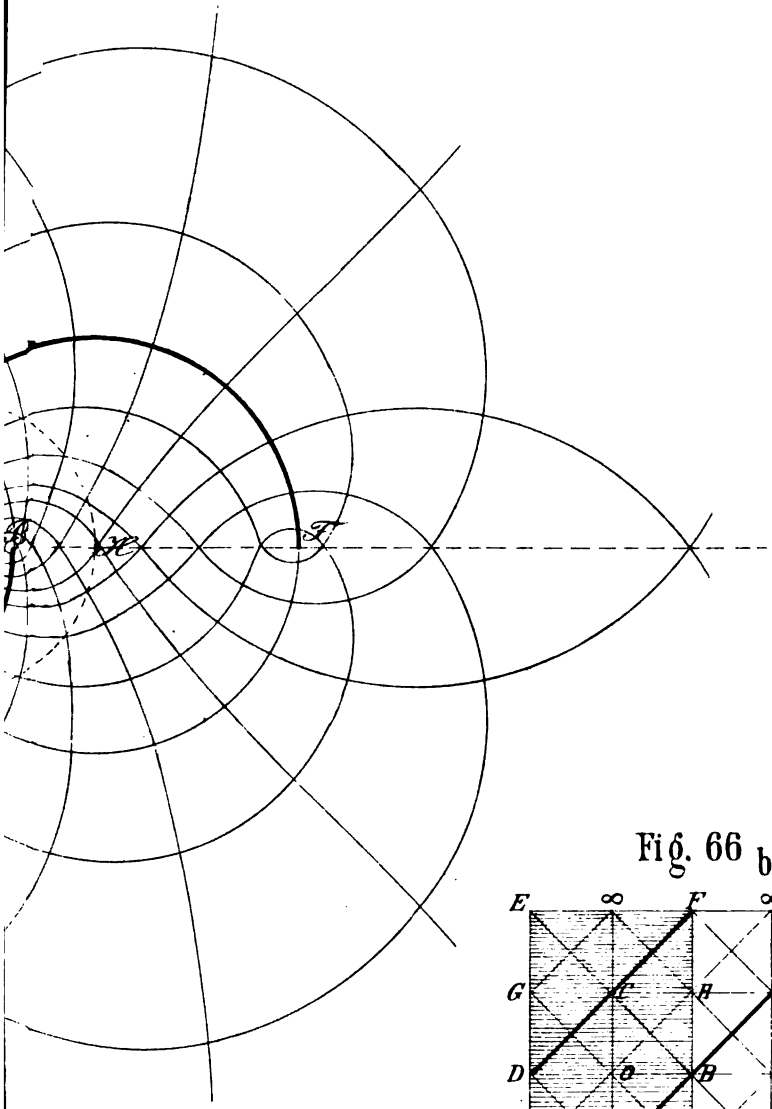


Fig. 65 b.



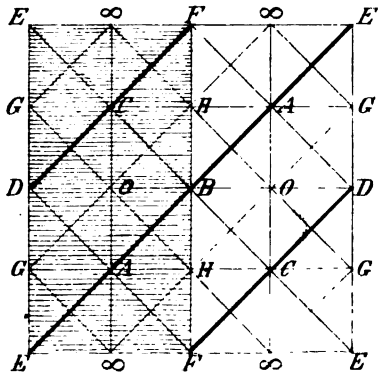
Steinam Curven mod. K·√4.

Lith v. Eschebach & Schreter, Leipzig



sinam-Curven mod. K: 3 V8.

Fig. 66 b.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig

GENERAL BOOKBINDING CO.
23 NYI 042 9 A DR 7185
QUALITY CONTROL MARK

Math 4638.82
Einfuhrung in die Theorie der isog
Cabot Science 003322863
3 2044 091 900 027